

I Mengen und Zahlen

4.10.2017

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$= \{ p \mid p \text{ ist mögliche Punktzahl bei Vorrechnen in Übung} \}$$

„Die Menge aller“ „für die gilt“

$$= \{ x \mid x \text{ ist mögliche Punktzahl bei Vorrechnen in Übung} \}$$



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (* 3. März 1845 in Sankt Petersburg; † 6. Januar 1918 in Halle an der Saale)

$$\begin{aligned}
M_Q &= \{0, 1, 16, 81, 256, 625, \dots\} \\
&= \{0^2, 1^2, 4^2, 9^2, 16^2, 25^2, 36^2, 49^2, 64^2, 81^2, \dots\} \\
&= \{0^4, 1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^4, \dots\} \\
&= \{x \mid x \text{ ist vierte Potenz einer ganzen Zahl}\} \\
&= \{y^4 \mid y \text{ ist eine ganze Zahl}\}
\end{aligned}$$

Schreibweisen: Wir schreiben $z \in M$, wenn z in M enthalten ist, „ z ist ein Element von M “.
 Andernfalls: $z \notin M$, „ z ist kein Element von M “

Bsp. $17 \notin M_Q$ $81 \in M_Q$ $2011 \notin M_Q$

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z} &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} \\
\mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, 3, \dots\}
\end{aligned}$$

ganze Zahlen
 „natürliche (!) Zahlen“

$$\mathbb{N}_0 = \{x^4 \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{x^4 \mid x \in \mathbb{N}_0\}$$

Mengenoperationen Seien A, B zwei Mengen. Dann setze

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\} \quad \text{„inklusive oder“}$$

(es darf auch beides wahr sein)

Vereinigung

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Durchschnitt

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Differenz

Bsp.

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$B = \{0, 1, 4\}$$

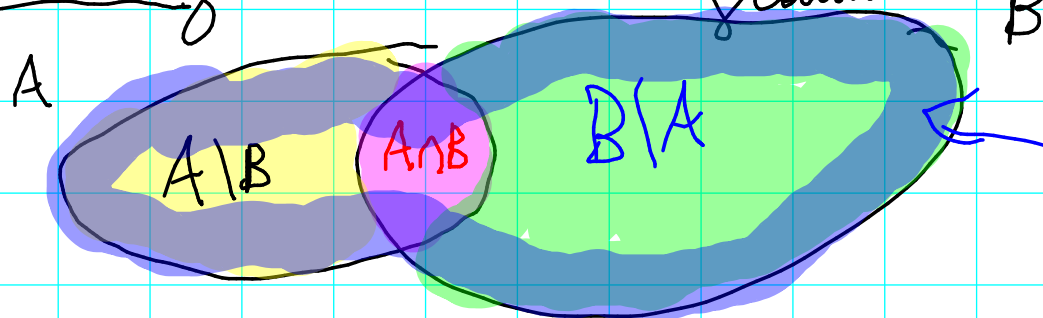
$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$$

$$A \cap B = \{0, 1\}$$

$$A \setminus B = \{-2, -1, 2\}$$

$$B \setminus A = \{4\}$$

Veranschaulichung: VENN-Diagramm



Funktioniert mit
2 oder 3 Mengen gut,

$A \cup B$ mit mehr Mengen
nicht mehr machbar...

Eine Menge A heißt Teilmenge von B , $A \subseteq B$, wenn
 alle Elemente von A in B enthalten sind.
 A heißt echte Teilmenge von B , $A \subset B$ (oder $A \subsetneq B$),
 wenn $A \subseteq B$, aber nicht $B \subseteq A$.
Leere Menge: die Menge ohne Elemente, $\emptyset$ ($\{\}$)

Bsp.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \not\subseteq A \\ \emptyset \subseteq A \\ \emptyset \subseteq B \\ \emptyset \subseteq \emptyset \end{array}$$

Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \text{ unter Identifikation}$$

über Kreuz

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{2011}{4022} = \dots$$

$\in \mathbb{B}$

Brüche sind auch Verhältnisse:

z.B. Möchte 120 € im Verhältnis 1:2 auf Alf und Berta aufteilen

$\Rightarrow$ Alf bekommt 40 €
Berta —||— 80 €
 $\frac{40}{80} = \frac{1}{2}$

$$40 = \frac{1}{1+2} \cdot 120$$

$$80 = \frac{2}{1+2} \cdot 120$$

Seien A und B zwei gegebene Punkte. Der Punkt C soll die Strecke AB im Verhältnis 2:5 teilen



Operationen: Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$(a^b)^c = a^{b \cdot c}$$

$$(2^3)^2 = 2^6$$

$\neq$

$$2^9 = 2^{(3^2)} = 2^{3^2}$$

$$\mathbb{R} := \{ a.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \dots \mid a \in \mathbb{Z} \quad d_j \in \{0, \dots, 9\} \},$$

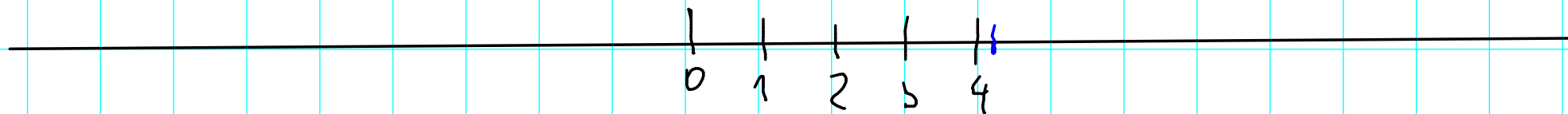
Wobei
Zahl $\overbrace{(a.1)0 \dots 0}^{99 \dots 99}$ mit
identifiziert werden

also z.B.

=

4.10 2011 9999 9999 9999 9999 9999 9999 9999 9999 9999 9999
4.10 2012 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000 0000

Darstellung reeller Zahlen am Zahlenstrahl



Intervalle: Seien a, b reelle Zahlen, $a \leq b$. Setze

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$$

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$$

$$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$$

$$[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \}$$

abgeschl. Intervall

offenes Intervall

halboffenes -"-

— " —

Beispiele, $A = [3, 5]$
 $B = (2, 4)$

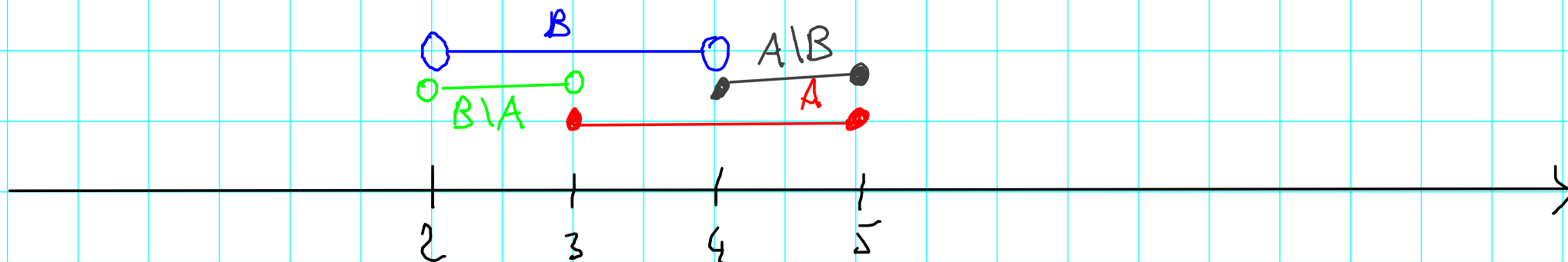
$$A = [3, 5]$$
$$B = (2, 4)$$

$$A \cap B = [3, 4)$$

$$A \cup B = [2, 5]$$

$$A \setminus B = [4, 5]$$

$$B \setminus A = (2, 3)$$



$$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$$

[illegible]

5.10. 2017

Fließkennendarstellung (für sehr große und sehr kleine Zahlen)

z.B.

0,0000057805102011

$$= 0,000057805102011$$

$$= 0,57805102011$$

$\cdot 10^{-1}$

$\cdot 10^{-5}$

$$= \underbrace{5,7805102011}_{\text{Mantisse}}$$

$$\cdot 10^{-6} \leftarrow \text{Exponent.}$$

- Regeln:
- Vorne (Mantisse) mit 10 multiplizieren (Zahl nach links verschieben) und Exponent erniedrigen.
 - Vorne (Mantisse) durch 10 dividieren (Zahl nach rechts verschieben) und Exponent erhöhen.

auf elektr. Geräten schreibt auch $5,7805102011 \text{ e} - 6$

gewisse Exponenten sind beliebt:

$$10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12} \text{ usw}$$

$$10^3, 10^6, 10^9, \dots$$

das entspricht SI-Präfixen:

Symbol	Name	Ursprung	Wert			
Y	Yotta	ital. <i>otto</i> = acht	$(10^3)^8 = 10^{24}$	1.000.000.000.000.000.000.000.000	Quadrillion	US Trillion Billion Million
Z	Zetta	ital. <i>sette</i> = sieben	$(10^3)^7 = 10^{21}$	1.000.000.000.000.000.000.000	Trilliarde	
E	Exa	gr. <i>exa</i> : über alles / gr. <i>εξάκις, hexákis</i> = sechsmal	$(10^3)^6 = 10^{18}$	1.000.000.000.000.000.000	Trillion	
P	Peta	gr. <i>petanyinnein</i> : alles umfassen / gr. <i>πεντάκις, pentákis</i> = fünfmal	$(10^3)^5 = 10^{15}$	1.000.000.000.000.000	Billiarde	
T	Tera	gr. <i>τέρας, téras</i> = Ungeheuer / <i>τετράκις, tetrákis</i> = viermal	$(10^3)^4 = 10^{12}$	1.000.000.000.000	Billion	
G	Giga	gr. <i>γίγας, gígas</i> = Riese	$(10^3)^3 = 10^9$	1.000.000.000	Milliarde	
M	Mega	gr. <i>μέγα, méga</i> = groß	$(10^3)^2 = 10^6$	1.000.000	Million	
k	Kilo	gr. <i>χίλιοι, chílioi</i> = tausend	$(10^3)^1 = 10^3$	1.000	Tausend	
h	Hekto	gr. <i>εκατόν, hekatón</i> = hundert	10^2	100	Hundert	
da	Deka	gr. <i>δέκα, déka</i> = zehn	10^1	10	Zehn	
(keins)	(keiner)	(keiner)	10^0	1	Eins	
d	Dezi	lat. <i>decimus</i> = zehnter	10^{-1}	0,1	Zehntel	
c	Zenti	lat. <i>centesimus</i> = hundertster	10^{-2}	0,01	Hundertstel	
m	Milli	lat. <i>millesimus</i> = tausendster	$(10^{-3})^1 = 10^{-3}$	0,001	Tausendstel	
μ	Mikro	gr. <i>μικρός, mikrós</i> = klein	$(10^{-3})^2 = 10^{-6}$	0,000.001	Millionstel	
n	Nano	gr. <i>νάνος, nános</i> und ital. <i>nano</i> = Zwerg	$(10^{-3})^3 = 10^{-9}$	0,000.000.001	Milliardstel	
p	Piko	ital. <i>piccolo</i> = klein	$(10^{-3})^4 = 10^{-12}$	0,000.000.000.001	Billionstel	
f	Femto	skand. <i>femton/femten</i> = fünfzehn	$(10^{-3})^5 = 10^{-15}$	0,000.000.000.000.001	Billiardstel	
a	Atto	skand. <i>årton/atten</i> = achtzehn	$(10^{-3})^6 = 10^{-18}$	0,000.000.000.000.000.001	Trillionstel	
z	Zepto	lat. <i>septem</i> = sieben	$(10^{-3})^7 = 10^{-21}$	0,000.000.000.000.000.000.001	Trilliardstel	
y	Yokto	lat. <i>octo</i> = acht	$(10^{-3})^8 = 10^{-24}$	0,000.000.000.000.000.000.000.001	Quadrillionstel	

Prozent

X Prozent
X %

entspricht

$$\frac{X}{100}$$

Beispiel

Betrag
+ 20% MwSt

Brutto

27,00 €

$$27 \cdot \frac{20}{100} = \frac{540}{100} = 5,4 \text{ €}$$

32,40 €

||

$$27 \left(1 + \frac{20}{100} \right) = 27 \cdot 1,2 = 32,40 \text{ €}$$

Umgekehrt:

Bruttobetrag von 72 € das sind 120 %
dividiere durch 1,2, also

$$\frac{72}{1,2} = \frac{720}{12} = 60 \text{ €}$$

~~falsch wäre gewesen:~~

~~- 20%~~

~~72 · Brutto~~

$$~~72 \cdot \frac{20}{100} = 14,4~~$$

~~57,60~~

Grundpreis 100 €.

Studentenrabatt : 10 %

90

Happy hour : noch -10 %

81

Bei 20% Stud. Rabatt: 81

$$100 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 72$$

$$100 \cdot 0,9 \cdot 0,8 = 72$$

Reihenfolge egal.

Prozente. $x \text{ ‰} = \frac{x}{100 \text{ ‰}}$