

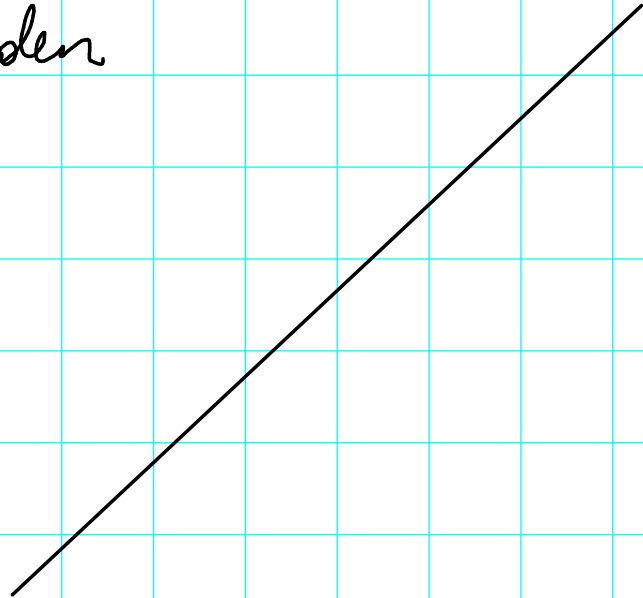
I Geometrie

Ein Punkt ist etwas, was keine Teile hat ...

Linien

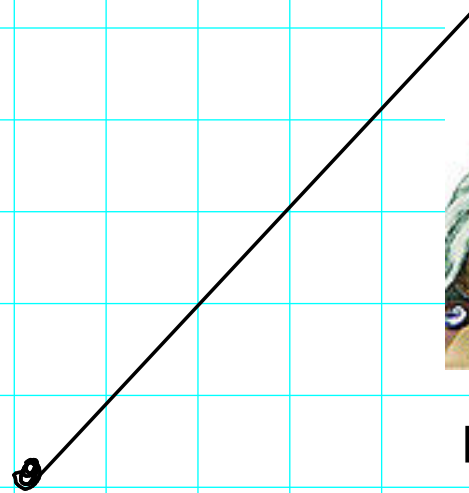
Geraden

in beide Richtungen
unendlich



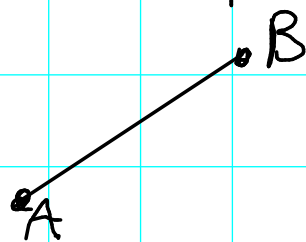
Strahl:

in eine Richtung unendlich



Strecke:

zwei Endpunkte

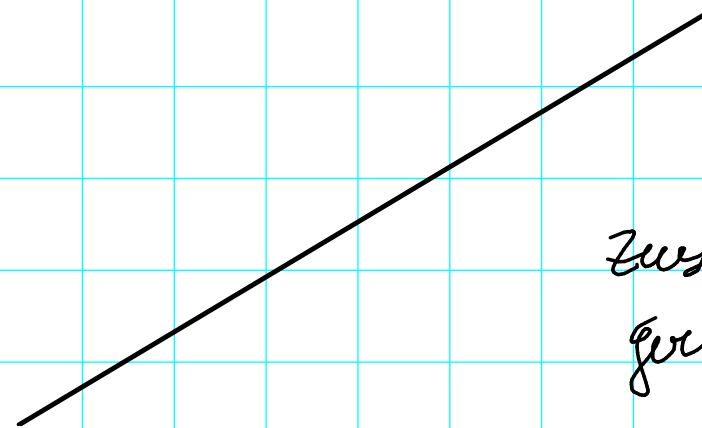
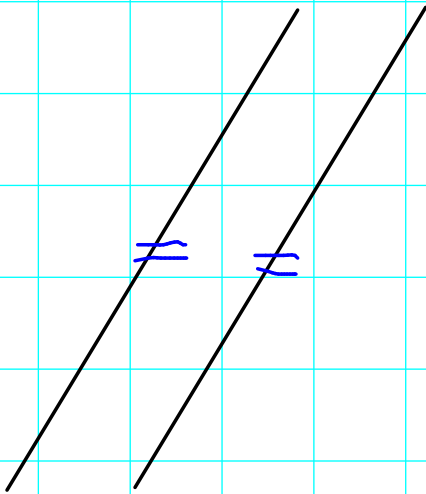


Bereiche Strecke mit $\overline{AB}$
Länge der Strecke $\overline{AB}$



Euklid (~ 300 v. chr)

Parallele Geraden: schneiden sich nie oder überall

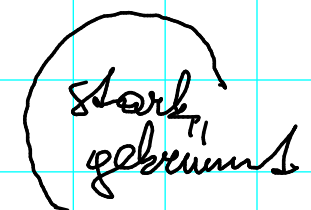
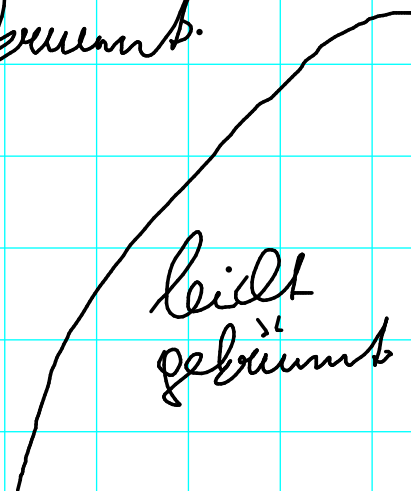
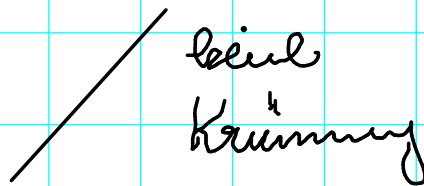


Zusammenfallende
Geraden

nicht gerade: „gebogene Linie“

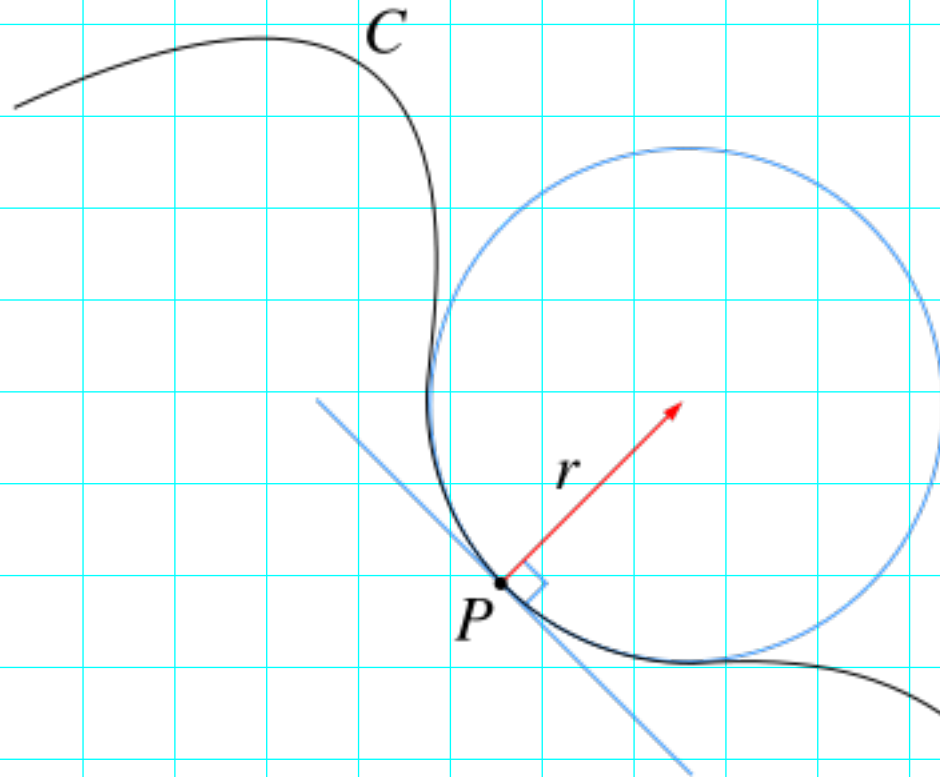
Kurve: gerade oder gebogen

Krümmung einer Kurve:



Quantifizieren der Krümmung

Krümmungsradius in einem Punkt P :
Kreis, der Kurve in Punkt
am "besten" approximiert



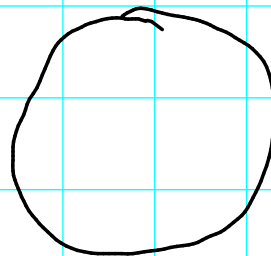
- gehen durch selben Punkt P
- Tangenten sollen gleich sein
(Tangente steht normal auf Radius)
- soll sich möglichst gut
"ausnügen"

hier steckt einiges an
Differentialrechnung drin.

kleiner Radius,
starke Krümmung



größerer Radius
schwächerer Krümmung



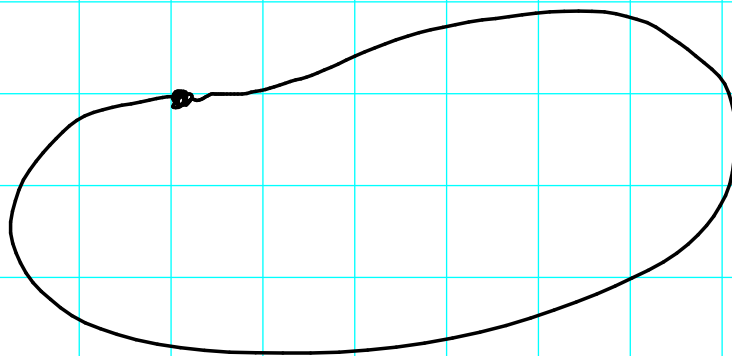
Radius ∞
"Krümmung" 0.

Definiere

"Krümmung"

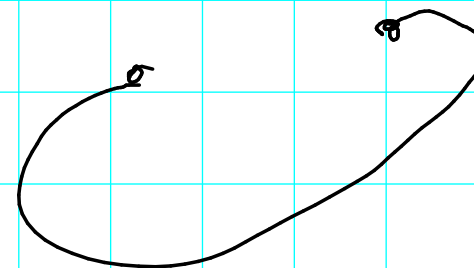
$= \frac{1}{\text{Krümmungsradius}}$

geschlossene Kurve

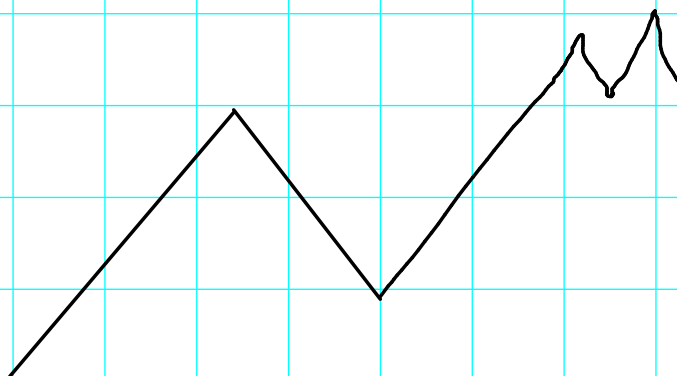


Start- und Endpunkt
fallen zusammen

Gegenteil: offene Kurve



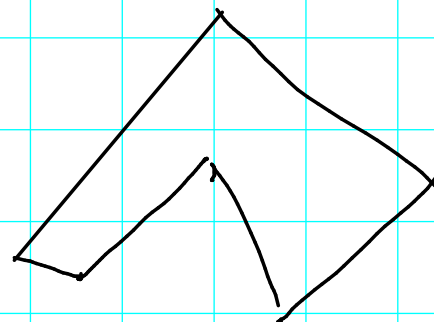
Streckenzug (Polygonzug)



Bsteht aus
zusammengefügten
Strecken

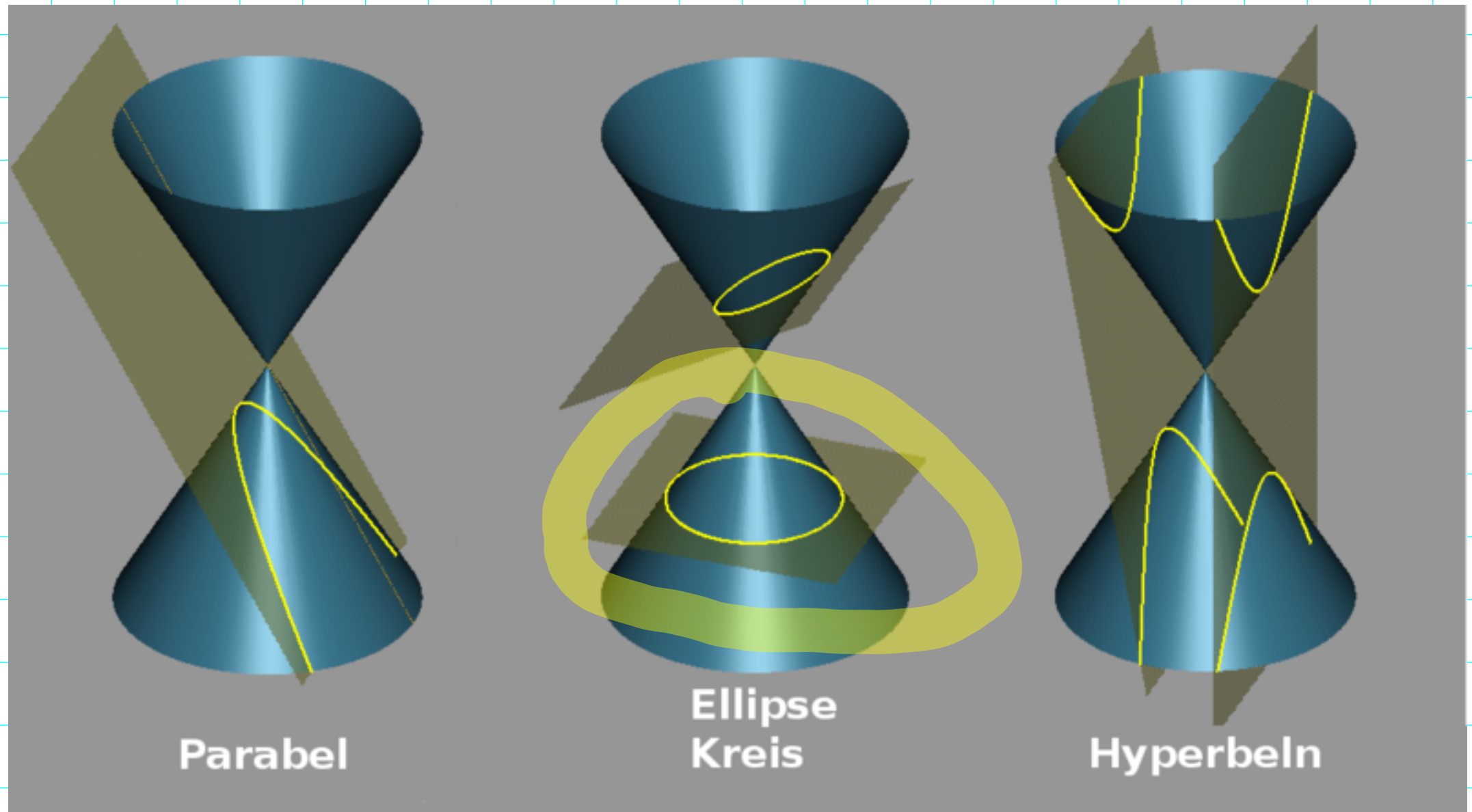
geschlossener Polygonzug:

Polygon.



Kegelschnitte

Schnitt zwischen Doppelkegel und Ebene.



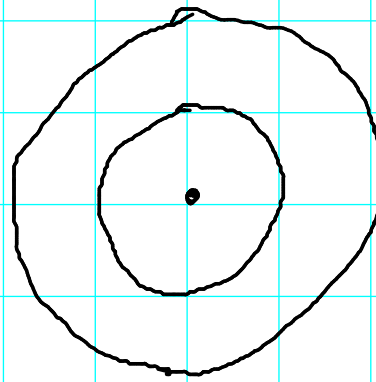
zu steil für Ellipse,
zu wenig steil f. Hyperbel
1 Ast.

Ellipse -- „verzerrter Kreis“

Hyperbel: 2 Aste

Kurven mit spez. Eigenschaften
werden wir noch anschauen --

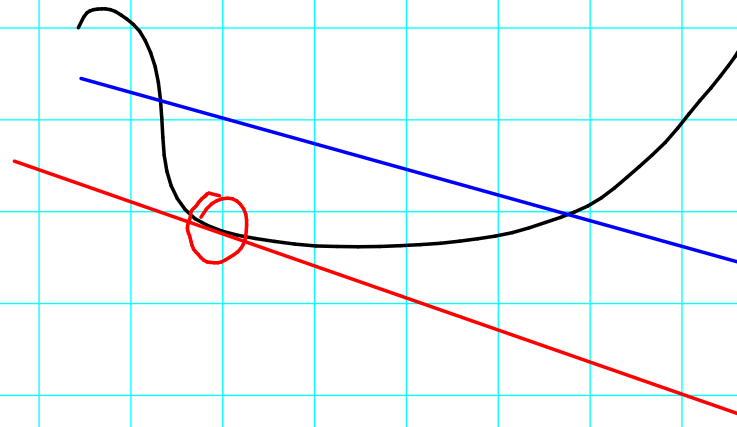
Konzentrische Kreise



Kreise mit
gleichen Mittelpunkt
und $\therefore$ versch.
Radien heißen
konzentrisch.

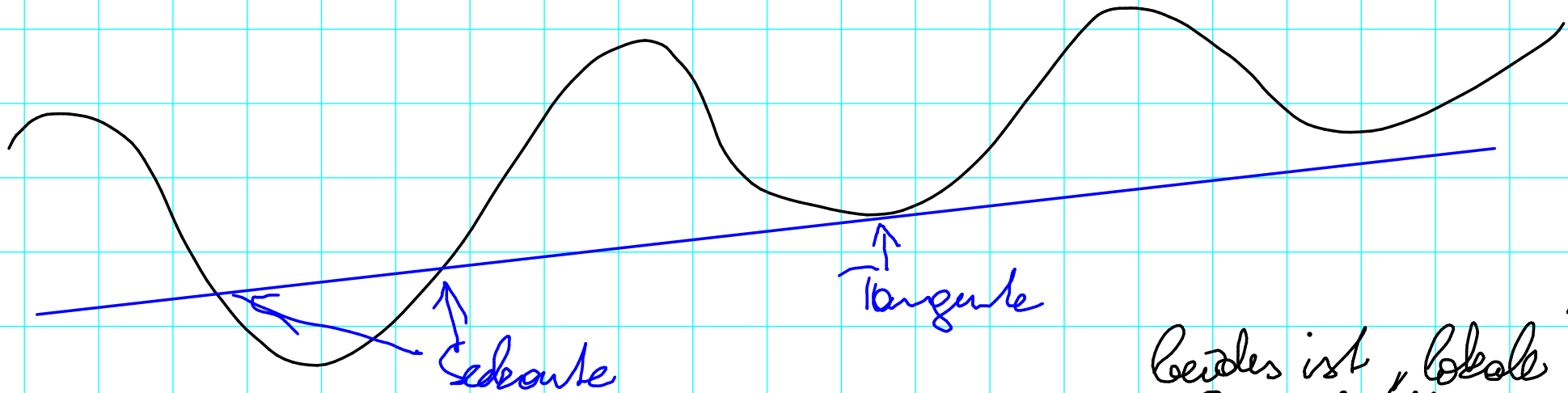
Sekante einer Kurve

Tangente an eine Kurve.



Sekante

Tangente „berührt Kurve“



Beides ist „lokal“
Eigenschaft,

Flächen in $\mathbb{R}^3$

zweidimensionale Objekte im Raum

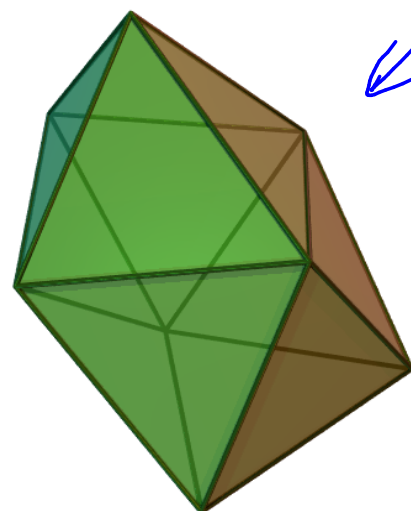
↙
Ebene

↓
gebogene Fläche.

geschlossen

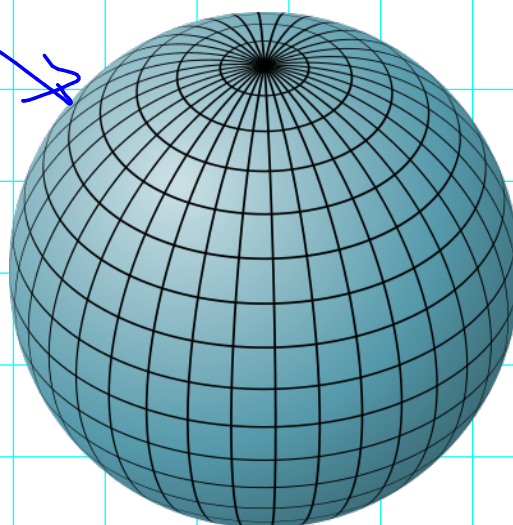
vs

offen

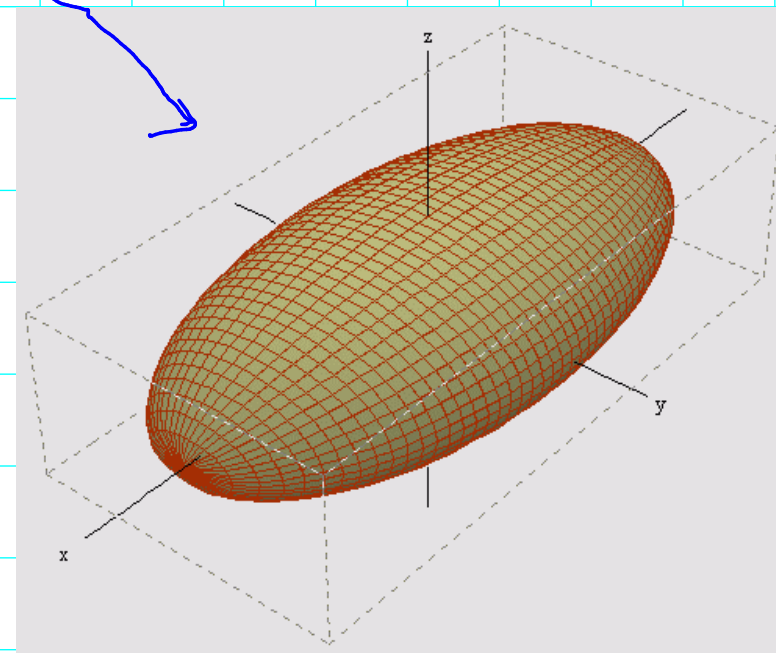


geschlossen

Kugel

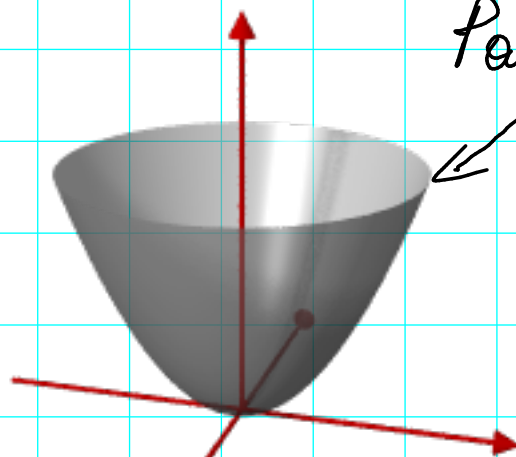


Ellipsoid



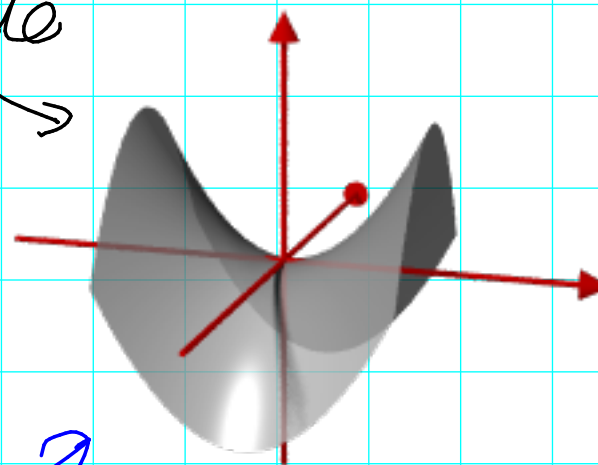
Polyeder
(Kantenflächen
sind eben)

Paraboloid



ellipt. Paraboloid

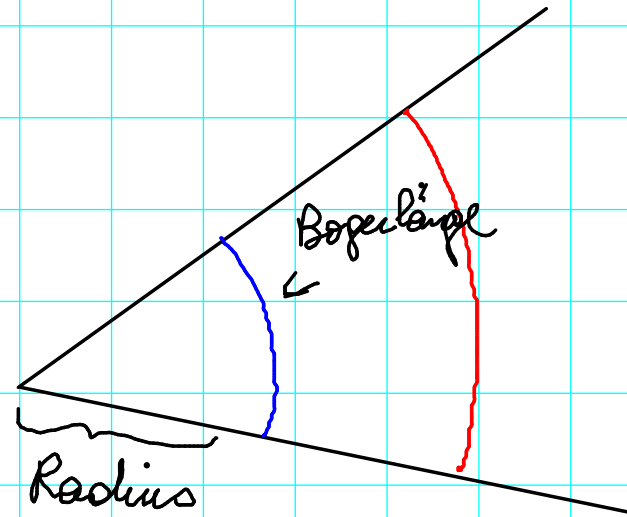
offen



hyperbol. Paraboloid

Ebene Geometrie

Winkel,



doppelter Radius $\hat{=}$ dopp. Bogenlänge

Für diese beiden Strahlen ist
Verhältnis

$$\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$$

Dieses Verhältnis $\frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$ ^{konstant.} nennt man Winkel zwischen
den beiden Strahlen.

Somit ist Winkel dimensionslos, also Einheit 1

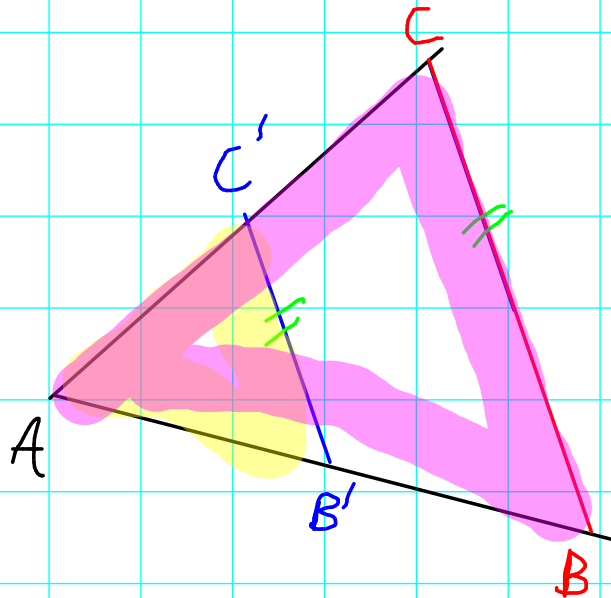
Kreis mit Radius 1: Bogenlänge 2π .
(definiere π als die Bogenlänge eines Halbkreises mit Radius)
 $\pi \approx 3.14159 \dots$

Gesamter Kreis : 2π
Halbkreis : π

Viereckkreis : $\pi/2$
:

Zur Unterhaltung / Verwirrung / Vereinfachung gibt es weitere Bezeichnungen:
"Grad" : Vollkreis $\hat{=} 360^\circ$ ($360 = 8 \cdot 5 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \dots$)
"Neugrad" / "Gon" Vollkreis $\hat{=} 400$ Neugrad.

Ähnlichkeit / Strahlensatz



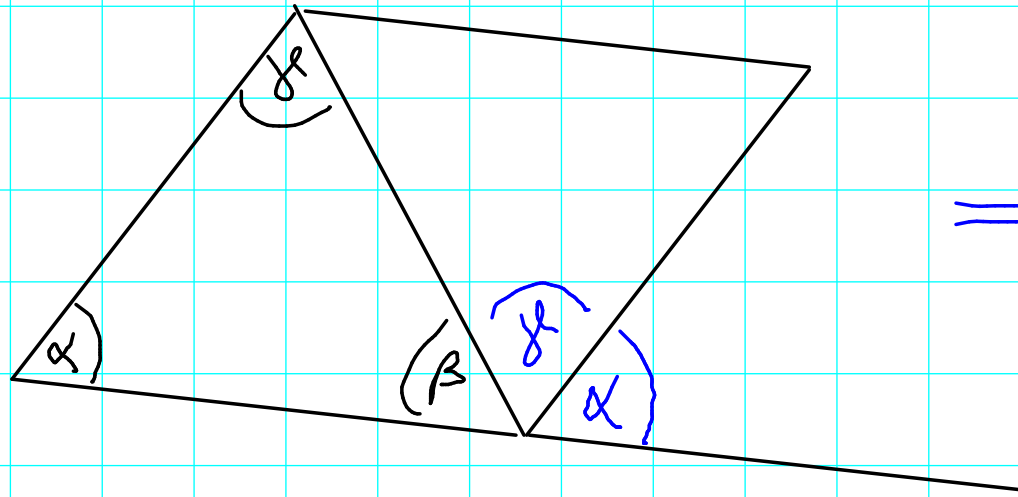
Es gilt (Strahlensatz):

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}}$$

Vergrößern ändert nichts am
Seitenverhältnis.

$$\frac{\text{Flächeninhalt}(ABC)}{\text{Flächeninhalt}(AB'C')} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} \right)^2$$

Dreieck:

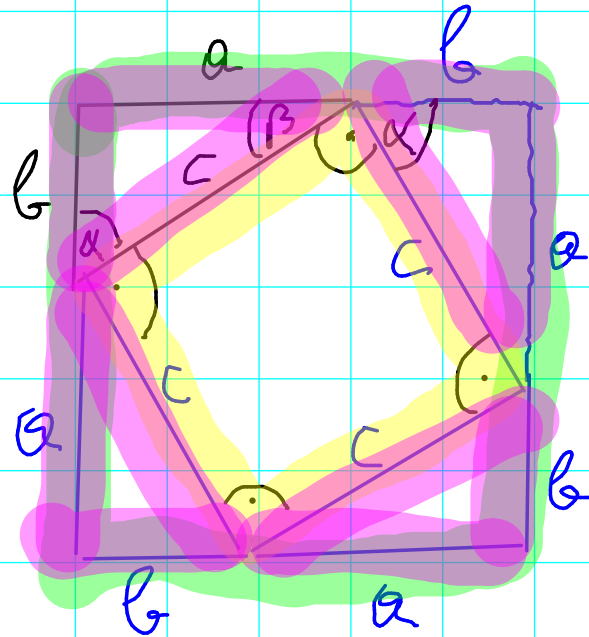
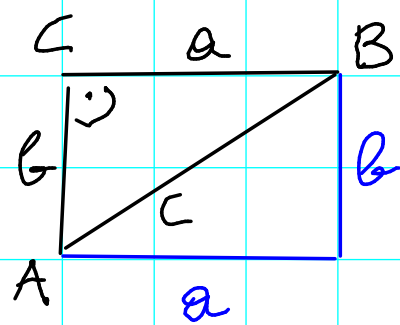


$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi = 180^\circ$$

Winkelsumme im Dreieck: 180° .

rechtwinklige Dreiecke

ein Winkel ist rechter Winkel ($\hat{=}$ Viertelkreis)



$$\overline{AB} = c$$

$$\overline{BC} = a$$

$$\overline{AC} = b$$

Flächeninhalt: $\frac{ab}{2}$
 (Hälfte des Rechtecks mit
 Seitenlängen a und b)

großes Quadrat mit Seitenlänge $a+b$
 und Fläche $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

kleines Quadrat mit Seitenlänge c
 und Fläche c^2

Fläche der 4 Dreiecke

$$4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab$$

also:

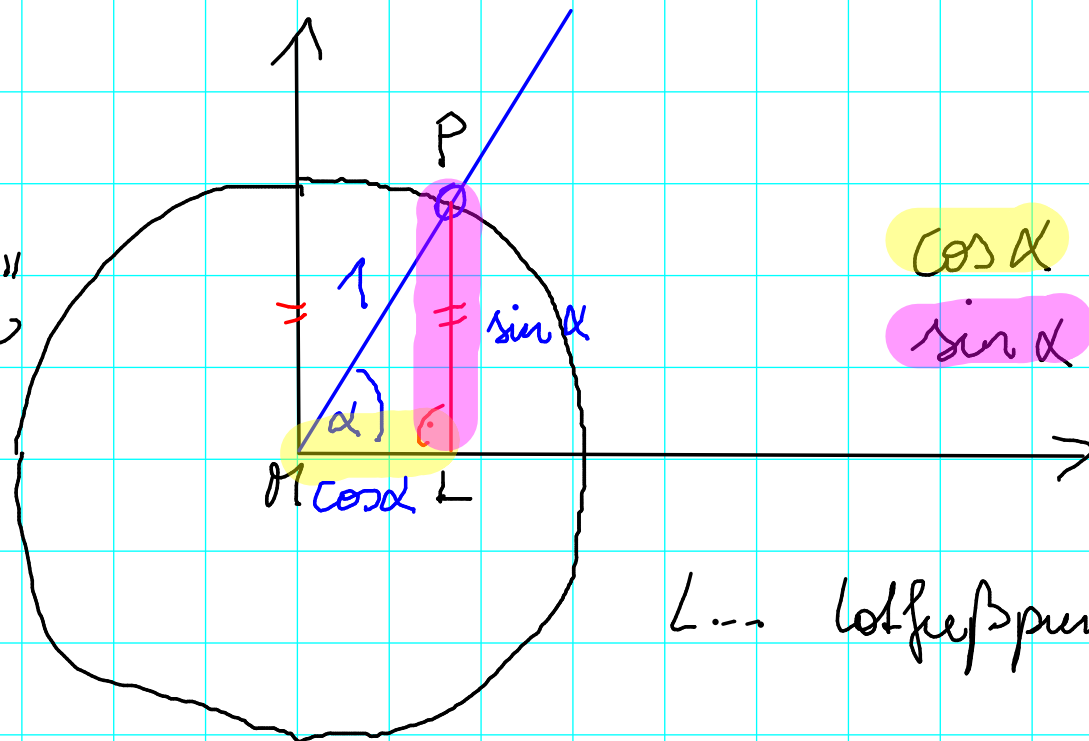
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \implies$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Pythagoras

Trigonometrie

"Winkel Funktionen"



Kreis mit Radius 1

$$\cos \alpha := \overline{OL}$$

$$\sin \alpha := \overline{LP}$$

"Cosinus von α "
"Sinus von α "

L ... Lotfußpunkt von P auf x-Achse

6.10.2011

Die Längen sind orientiert zu sehen, d.h. $\cos \alpha < 0$, wenn P links der y-Achse liegt; $\sin \alpha < 0$, wenn P unter der x-Achse liegt.

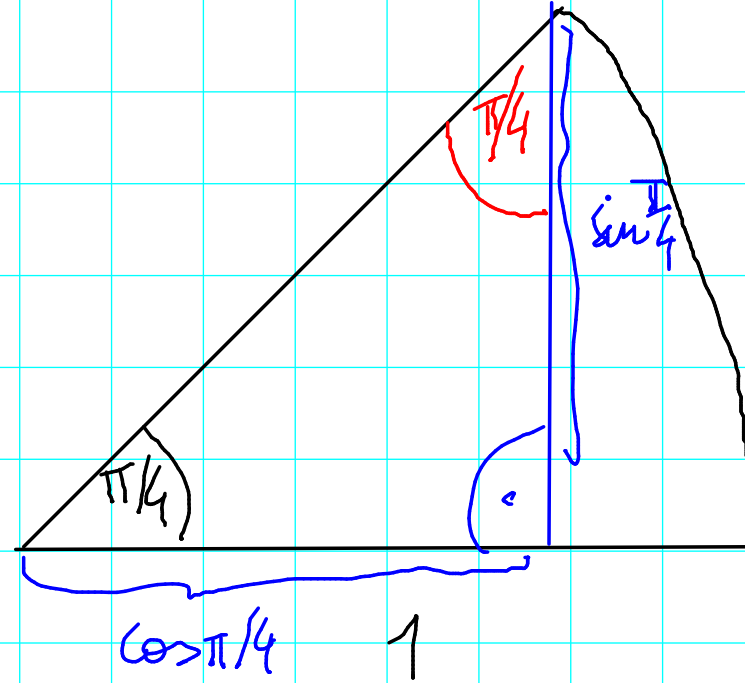
$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1^2$$

Pythagoras.

Spezielle Werte:

α	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$3\pi/2$
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	0
$\sin \alpha$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1

Bei $\pi/4$:



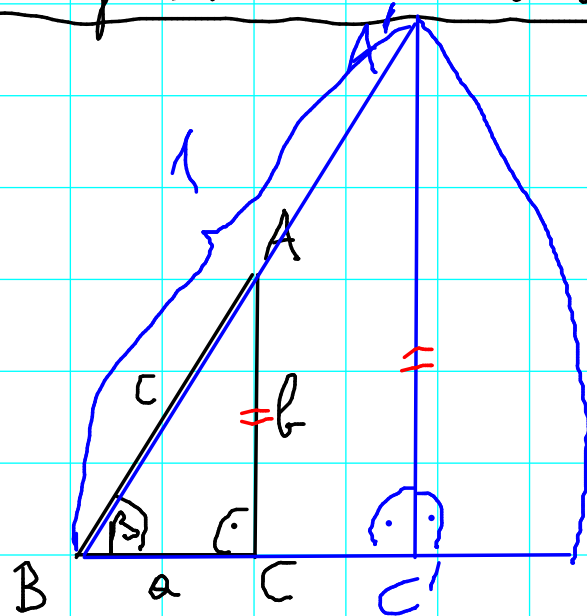
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \pi \checkmark$$

somit ist Dreieck gleichschenkelig

$$\Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} > 0$$

$$2 \cos^2 \frac{\pi}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck



$$\overline{BC'} = \cos \beta$$

$$\overline{A'C'} = \sin \beta$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\sin \beta}{1} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{b}{c}$$

$\sin \beta$

$$\cos \beta = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankate}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkate}}{\text{Hypotenuse}}$$

$\Rightarrow$

$$\tan \beta := \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkate}}{\text{Ankate}}$$

$$\cot \beta = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\text{Ankate}}{\text{Gegenkate}} = \frac{1}{\tan \beta}$$

Additionstheoreme

Für beliebige α, β :

$$\cos(\alpha + \beta) = ?$$

$$\sin(\alpha + \beta) = ?$$

$$\overline{QS} = \sin \beta$$

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{QU}} = \cos \alpha$$

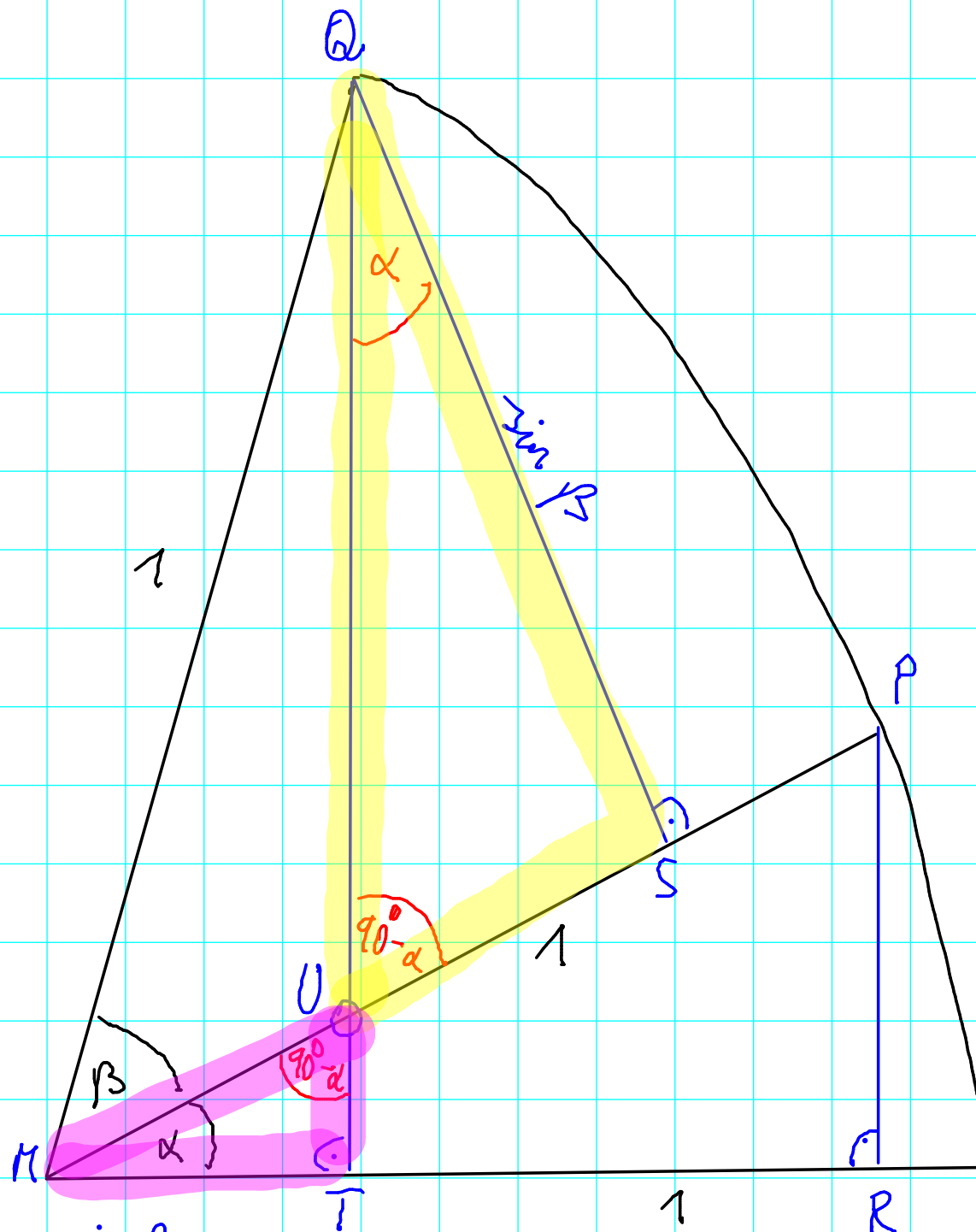
$$\Rightarrow \overline{QU} = \frac{\overline{QS}}{\cos \alpha} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\overline{US}}{\overline{QS}} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\overline{US} = \overline{QS} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha}$$

$$\overline{RS} = \cos \beta$$

$$\overline{RU} = \overline{RS} - \overline{SU} = \cos \beta - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha} \quad (= \overline{RS} - \overline{SU})$$



$$\frac{\overline{UT}}{\overline{UU}} = \cos \alpha \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \overline{UT} = \overline{UU} \cos \alpha = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{\overline{UT}}{\overline{UU}} = \sin \alpha \Rightarrow \overline{UT} = \overline{UU} \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha - \frac{\sin^2 \alpha \sin \beta}{\cos \alpha}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) &= \overline{QT} = \overline{QU} + \overline{UT} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} + \sin \alpha \cos \beta - \frac{\sin^2 \alpha \sin \beta}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{\sin \beta - \sin^2 \alpha \sin \beta}{\cos \alpha} + \sin \alpha \cos \beta = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} \left(\underbrace{1 - \sin^2 \alpha}_{\cos^2 \alpha \text{ (Pythagoras!)}} \right) + \sin \alpha \cos \beta$$

$$= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta$$

Also:

$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$
--

Was passiert bei $\alpha = \beta$

$$\cos(2\alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

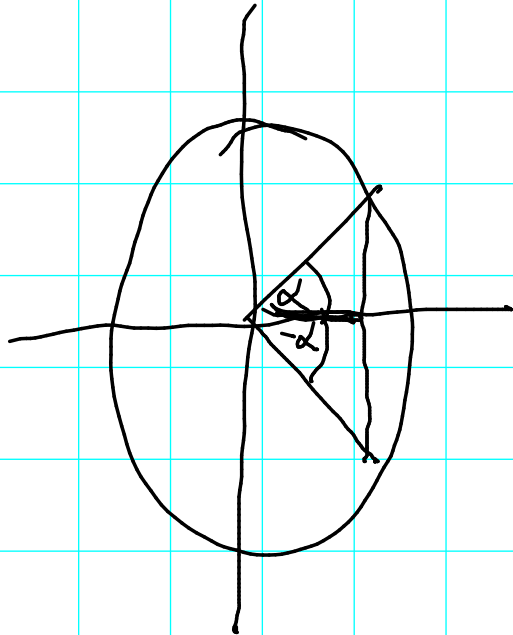
$$\sin(2\alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

Doppelwinkelformeln:

$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \\ \sin(2\alpha) &= 2\sin\alpha \cos\alpha\end{aligned}$$

Weitere Konsequenzen aus Additionstheoremen

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta\end{aligned}$$



$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

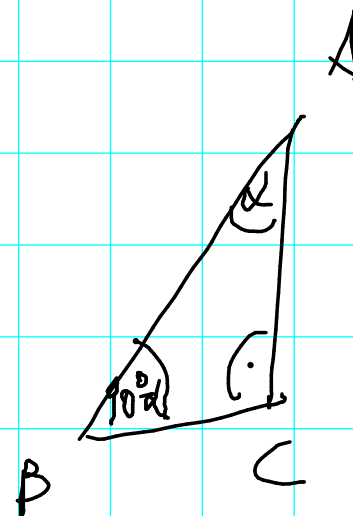
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

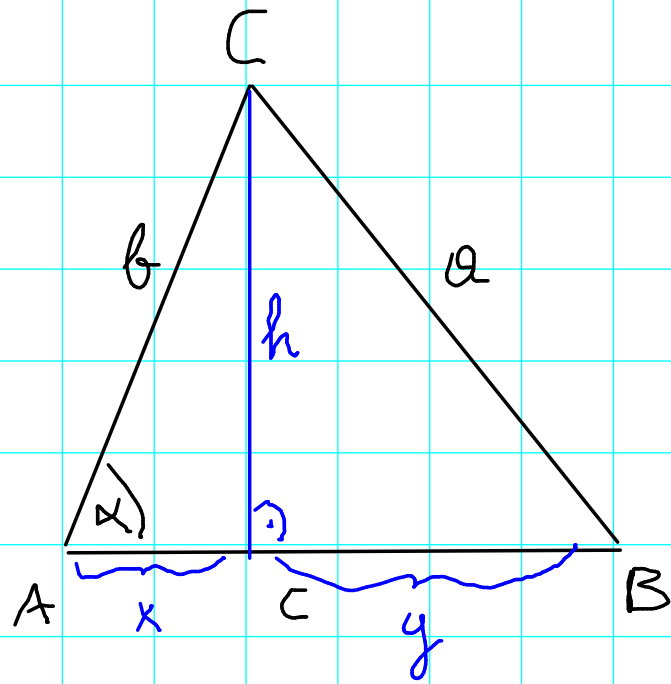
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 \cos \alpha + \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{2} \sin \alpha = -\sin \alpha$$

uno.



Winkelfunktionen im allgemeinen Dreieck



$$\begin{cases} y^2 + h^2 = a^2 \\ x^2 + h^2 = b^2 \end{cases}$$

Pythagoras

$$\frac{x}{b} = \cos \alpha$$

$$x = b \cos \alpha$$

$$y = c - x = c - b \cos \alpha$$

$$a^2 - y^2 = h^2 = b^2 - x^2$$

alles einsetzen:

$\Leftrightarrow$

$$a^2 - (c - b \cos \alpha)^2 = b^2 - (b \cos \alpha)^2$$

$$a^2 - (c^2 - 2bc \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha) = b^2 - b^2 \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{a^2}_{\checkmark} - \underbrace{c^2}_{\checkmark} + 2bc \cos \alpha - \cancel{b^2 \cos^2 \alpha} = \cancel{b^2} - \cancel{b^2 \cos^2 \alpha}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

Cosinussatz.

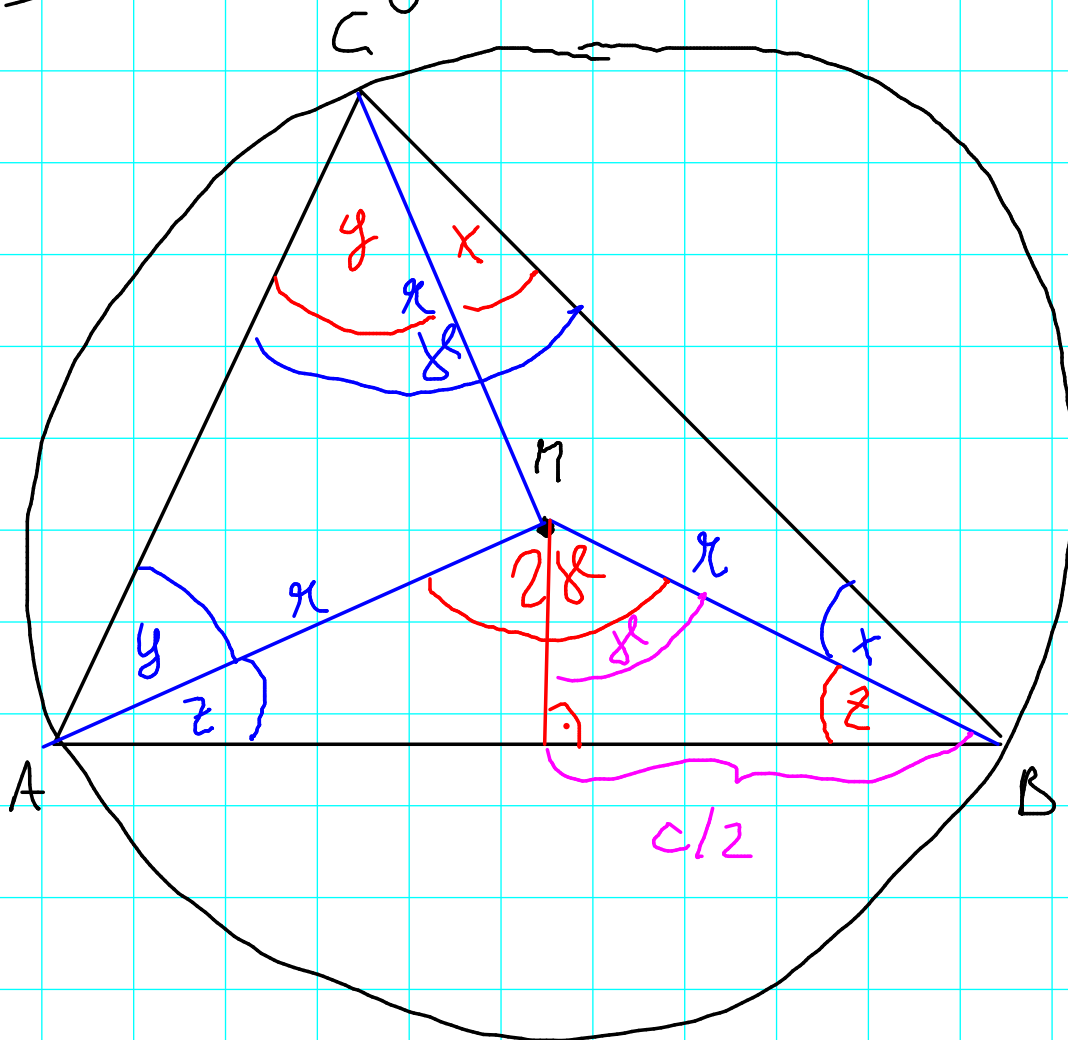
Was passiert, wenn $\alpha = 90^\circ$?

Auf dem Weg zum Sinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 0$$

Pythagoras
revisited.

Dreieck ABC mit seinem
Umkreis (Mittelpunkt π , Radius r).



$$x + y + z = 90^\circ$$

(Hälfte Winkelsumme
im Dreieck ABC)

$$\begin{aligned} \angle B\pi A &= 180^\circ - 2z = 2x + 2y + 2z - 2z \\ &= 2x + 2y = 2\gamma \end{aligned}$$

$$\sin \gamma = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

Analog: $\frac{a}{\sin \alpha} = 2r$

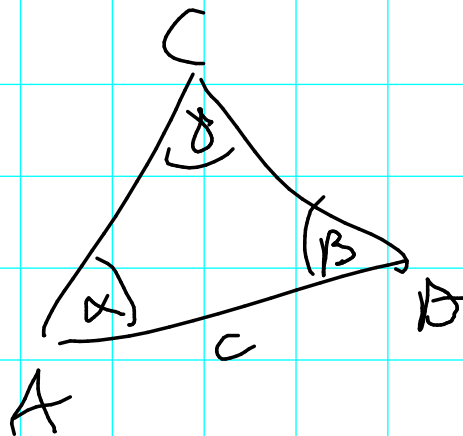
$$\frac{b}{\sin \beta} = 2r$$

Sinussatz im allg. Dreieck

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

r ... Umkreisradius

Bsp.



$$\begin{aligned} c &= 10 \\ \alpha &= 20^\circ \\ \beta &= 30^\circ \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} c &= 10 \\ \alpha &= 20^\circ \\ \beta &= 30^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma = 130^\circ$$

Verfäng = ?

Sinussatz:

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = 10 \frac{\sin 20^\circ}{\sin 130^\circ}$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \Rightarrow b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma} = 10 \frac{\sin 30^\circ}{\sin 130^\circ}$$

$$u = a + b + c = c \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} + \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} + 1 \right) = 10 \left(\frac{\sin 20^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 130^\circ} + 1 \right) \approx 21$$

□