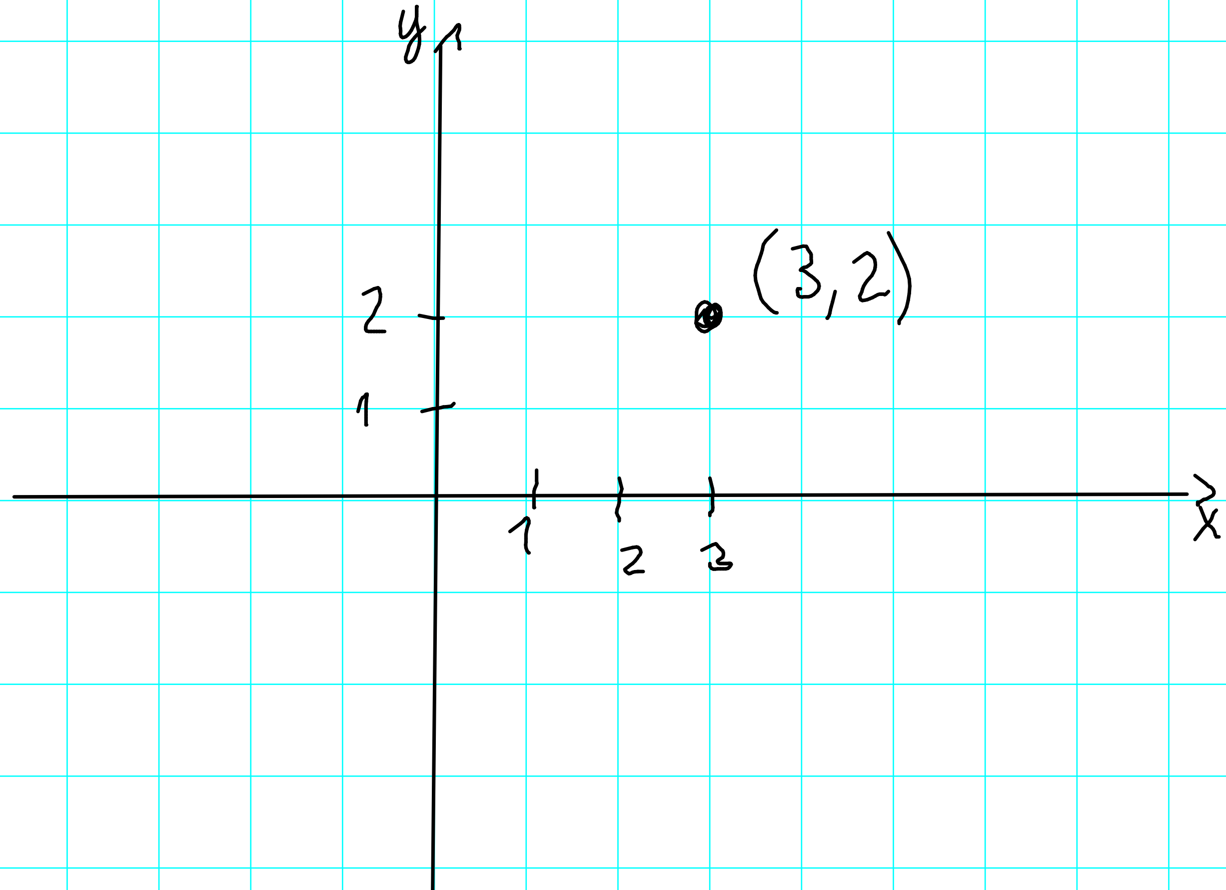
Kap 4 Vektorrechnung

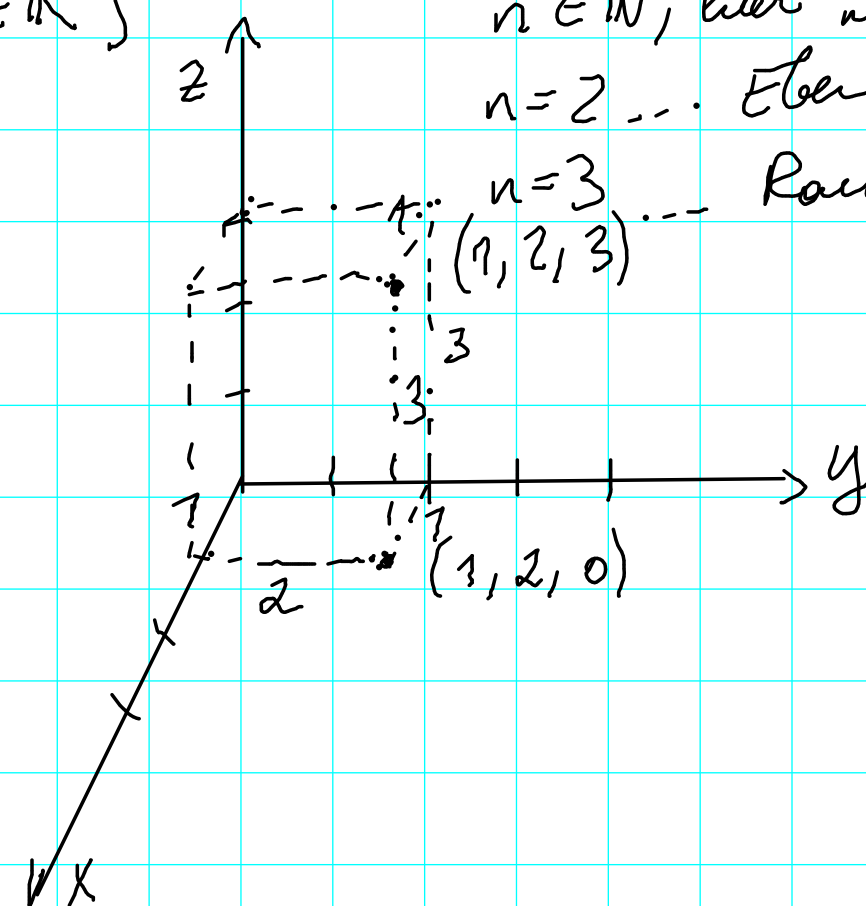
$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid \text{alle } x_j \in \mathbb{R} \}$

$n \in \mathbb{N}$, hier meist

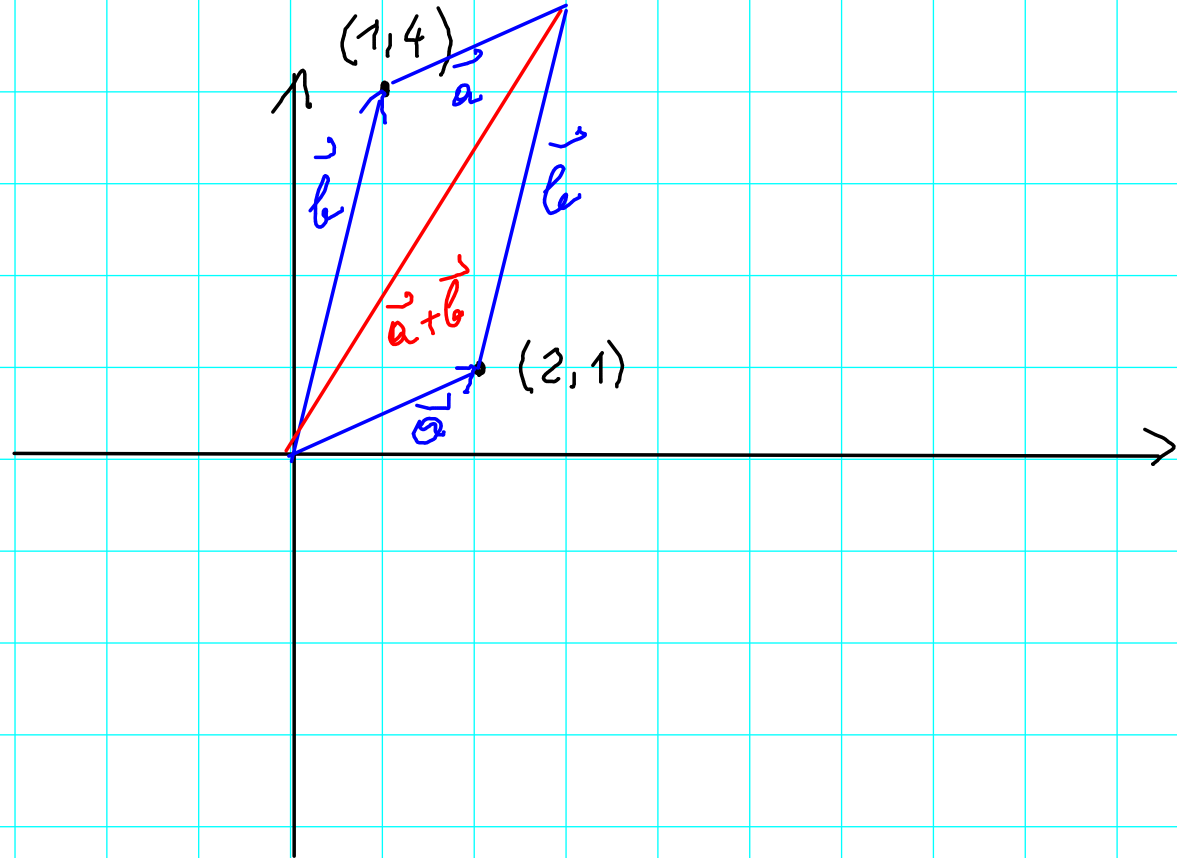
$n = 2$ ... Ebene

$n = 3$ ... Raum





Wir wollen mit Tupeln $(x_1, \dots, x_n)$ rechnen.



Einem Punkt entspricht immer ein Weg (Strecke) vom Ursprung zu diesem Punkt

Punkt $P(2,1)$ entspricht Ortsvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punkt $Q(1,4)$ entspricht Ortsvektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Addition von zwei Vektoren entspricht hintereinander abarbeiten der Wegbeschreibungen:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

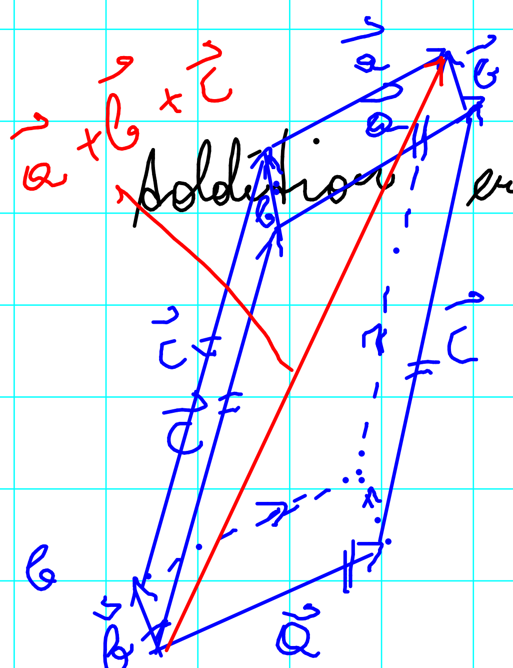
Wenn wir ein Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ als „Wegbeschreibung" auffassen, schreiben wir das als „Spaltenvektor"

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

und nennen das Vektor. Jedem Punkt entspricht der zugehörige Ortsvektor (mit den gleichen Zahlen)

Addition von 2 Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ist

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$



Addition entspricht Parallelogrammregel im $\mathbb{R}^2$ (s.o.)
bzw Parallelepiped im $\mathbb{R}^3$

Das geht nur gut, wenn beide Vektoren dieselbe Dimension haben

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}24\\12\end{pmatrix}$$ nicht definiert.

Multiplikation eines Vektors mit Skalar

Skalar ... neuer Name für reelle Zahl, um von Vektoren abzugrenzen:

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. $\quad$ Definiere $\lambda \vec{x} = \begin{pmatrix}\lambda x_1\\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n\end{pmatrix}$

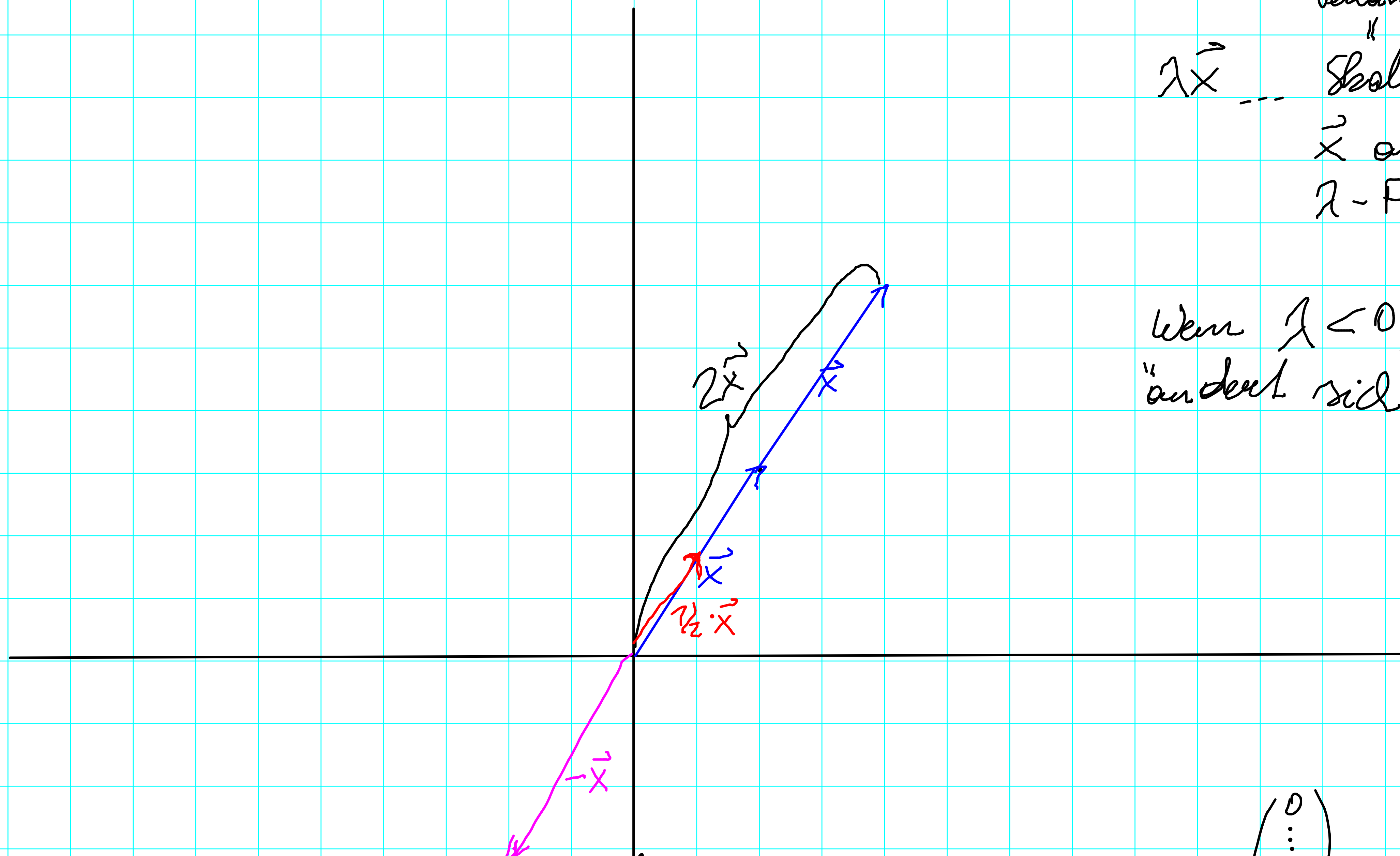
geometrische Deutung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

Verlängerung / Verkürzung
„

$\lambda\vec{x}$ ... „Skalierung" von $\vec{x}$ auf das λ-Fache

Wenn $\lambda < 0$, so ändert sich Orientierung



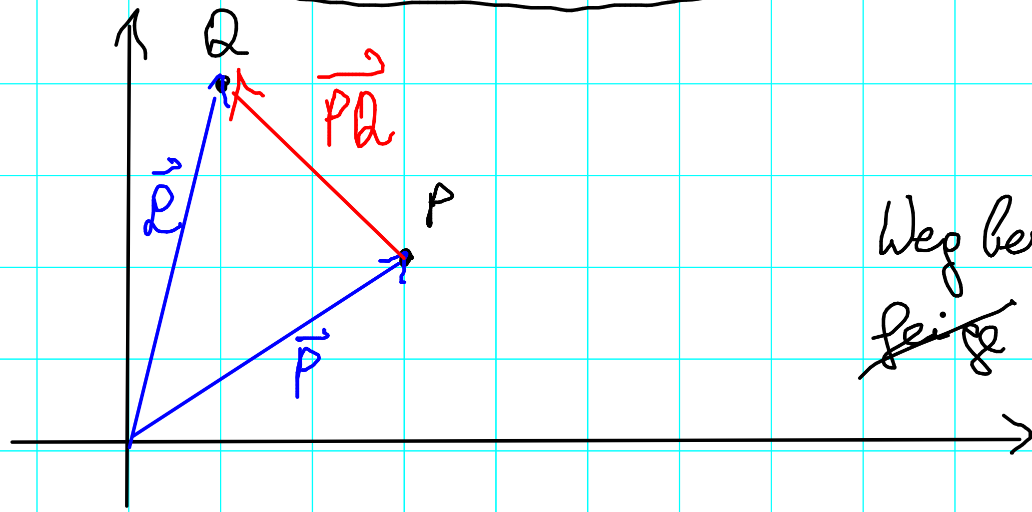
Rechenregeln: Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ „Nullvektor".

Dann gilt:

- $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ „Assoziativgesetz"
- $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ „Kommutativgesetz"
- $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

- $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ wobei $-\vec{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$
- $\lambda(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$
- $(\lambda+\mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$
- $(\lambda\cdot\mu)\vec{x} = \lambda(\mu\vec{x})$
- $1\vec{x} = \vec{x}$

<u>Subtraktion von Ortsvektoren</u>



$P(3,2)$ mit seinem Ortsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$Q(1,4)$ —— " —— $\vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Wegbeschreibung für Weg von P nach Q?

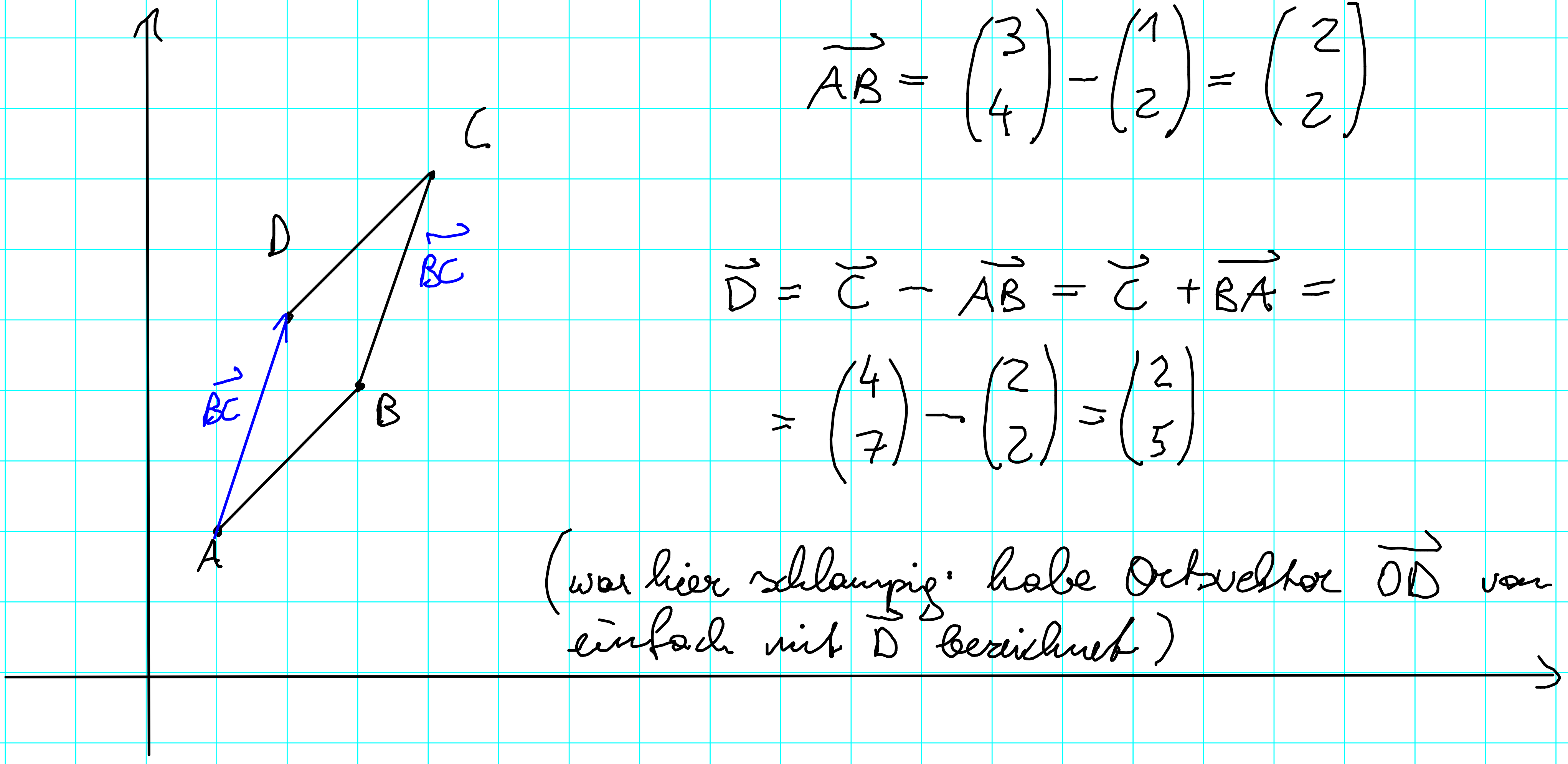
~~feige~~ Variante:

$\vec{PQ} = -\vec{p} + \vec{q}$ (zuerst heim zum Ursprung)

$= \vec{q} - \vec{p}$

„Spitze minus Schaft"

Beispiel Vom Parallelogramm $ABCD$ seien $A=(1,2)$, $B=(3,4)$, $C=(4,7)$ gegeben. Bestimme D.



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

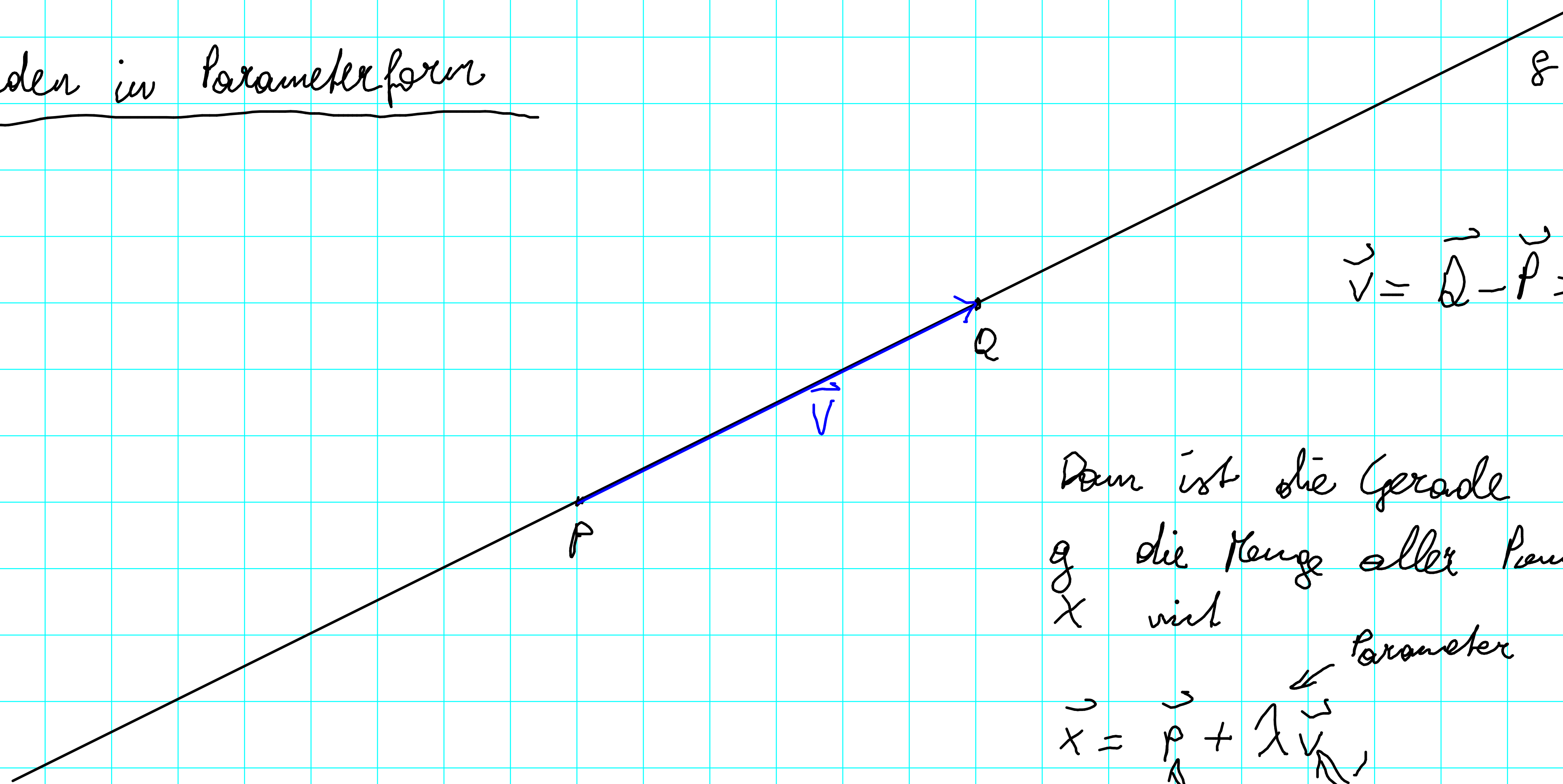
$$\vec{D} = \vec{C} - \vec{AB} = \vec{C} + \vec{BA} =$$
$$= \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

(war hier schlampig: habe Ortsvektor $\vec{OD}$ von D einfach mit $\vec{D}$ bezeichnet)

Andere Variante:
$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{BC}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

Geraden in Parameterform



$$\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P} = \overrightarrow{PQ}$$

Dann ist die Gerade g die Menge aller Punkte X mit

Parameter

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{v}$$

Ortsvektor Richtungsvektor

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Beispiel 1</u> Bestimme die Gerade durch die Punkte $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$.

$\vec{P} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\vec{Q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor $\vec{v} = \vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Gleichung der Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Das war nicht schön genug: Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wäre schöner, aber wegen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ändert das nichts. Also: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 1a. Liegt der Punkt $Z = (11, 9)$ auf dieser Geraden?

Ansatz. $\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 11 = 9 + \mu \\ 9 = 11 + \mu \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = 2 \\ \mu = -2 \end{cases}$

$\iff$ leider nicht.

Der Punkt liegt nicht auf der Geraden.

<u>Beispiel 2</u>. Man bestimme den Schnittpunkt der beiden Geraden

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Unfreundlicherweise kam beidemale der-selbe Parameter λ vor, obwohl die beiden Parameter nichts miteinander zu tun haben.

Umbenennen:

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Schnittpunkt S liegt auf beiden Geraden. Es gibt also ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und ein $\beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

somit:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \alpha = 9 - \beta \\ 2 + 3\alpha = 11 + 4\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 8 - \beta \\ 3\alpha = 9 + 4\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 3(8-\beta) = 9 + 4\beta$$

$$\Leftrightarrow \quad 24 - 3\beta = 9 + 4\beta$$

$$\Leftrightarrow \quad 15 = 7\beta$$

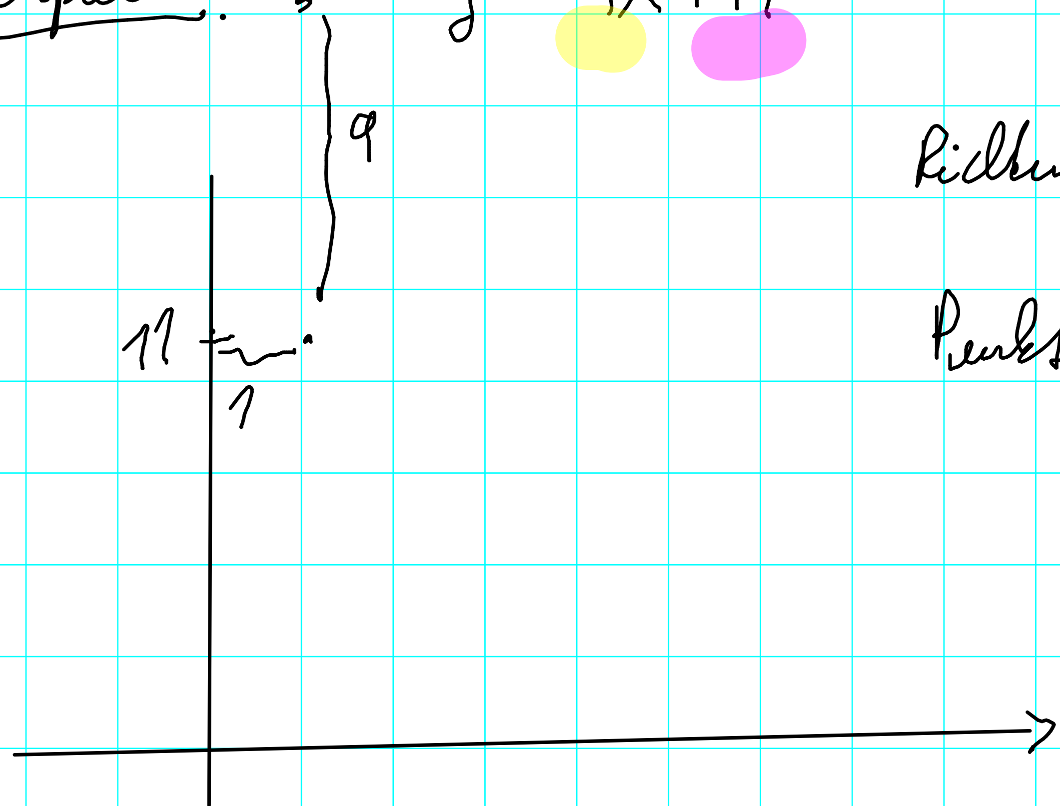
$$\Leftrightarrow \quad \beta = \frac{15}{7} \qquad \alpha = 8 - \beta = \frac{41}{7}$$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{41}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{48}{7} \\ \frac{137}{7} \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{15}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \checkmark$$

Zusammenhang mit Geraden $y = kx + d$

Beispiel 2. $y = 9x + 11$

Wie lautet Gerade in Parameterform?



Richtungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

Punkt: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3. Gerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x - 2 \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow y = 3 + 4(x-2) =$$

$$= -5 + 4x.$$

<u>Geraden im Raum</u> funktionieren ganz gleich.

<u>Beispiel 4</u>. ges: Gerade durch die Punkte $P = (1, 2, 3)$ $Q = (9, 29, 11)$

$$\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 9 \\ 29 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

<u>Beispiel 5</u>.

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt?

$$h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

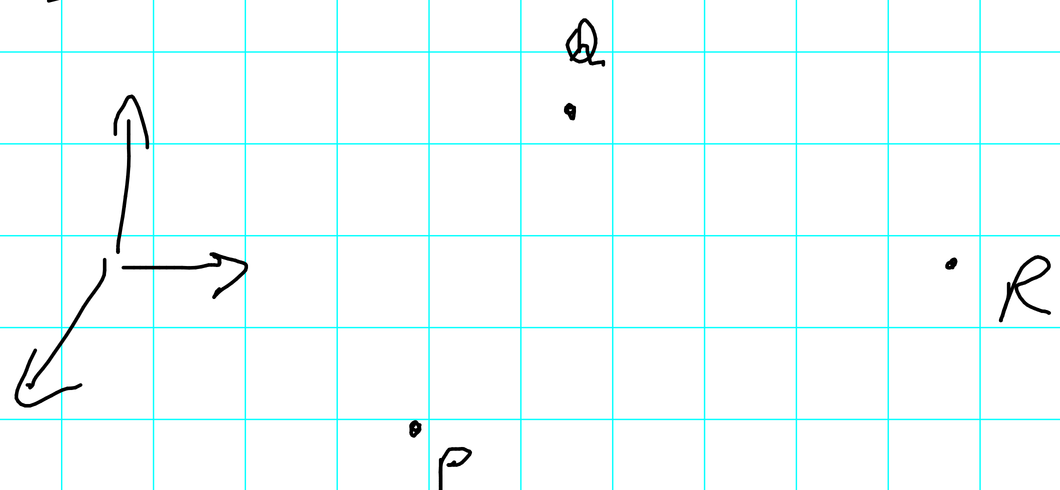
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}1+\alpha = 1+\beta\\ 1=\beta \\ 1+\alpha = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha=\beta\\ \beta=1\\ \alpha=-1\end{cases}$$

keine Lösung, also kein Schnittpunkt

... Geraden waren windschief.

<u>Ebenen in Parameterform</u>



Zwei Richtungsvektoren:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PR}$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{PQ}$$

Ebene: $\vec{x} = \vec{P} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$.

Beispiel 6 Ebene durch die Punkte $P=(1,2,3)$ $Q=(9,3,8)$
$R=(9,1,1)$

$$\vec{v} = \vec{R} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

oder diverse Varianten:

$$\vec{x} = \vec{Q} + \alpha\, \overrightarrow{QP} + \beta\, \overrightarrow{QR}$$

usw.

Beispiel 7. Schneide Ebene $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

mit Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}8\\-1\\-2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}8\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 + 8\lambda + 8\mu \\ \alpha = 2 - \lambda + \mu \\ 1 + \alpha = 3 - 2\lambda + 5\mu \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 8\lambda + 8\mu = 2 - \lambda + \mu \\ 2 + 8\lambda + 8\mu = 3 - 2\lambda + 5\mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 9\lambda + 7\mu = 1 & \mid (-1) \\ 10\lambda + 3\mu = 1 & \end{matrix} \Big\} +$$

$$\lambda - 4\mu = 0 \qquad \lambda = 4\mu$$

$$36\mu + 7\mu = 1$$

$$\mu = 1/43$$

$$\lambda = 4/43$$

...

Skalarprodukt seien $\vec{p}, \vec{s} \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle \vec{p}, \vec{s} \rangle = p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots + p_n s_n$$ „Skalarprodukt"

(Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt Skalar)

Bsp. • $\mathbb{R}^2$: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{p}, \vec{s} \rangle = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = -1. \quad \in \mathbb{R}.$$

• $\mathbb{R}^3$: $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\langle \vec{t}, \vec{u} \rangle = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot (-1) = 1 \quad \in \mathbb{R}.$$

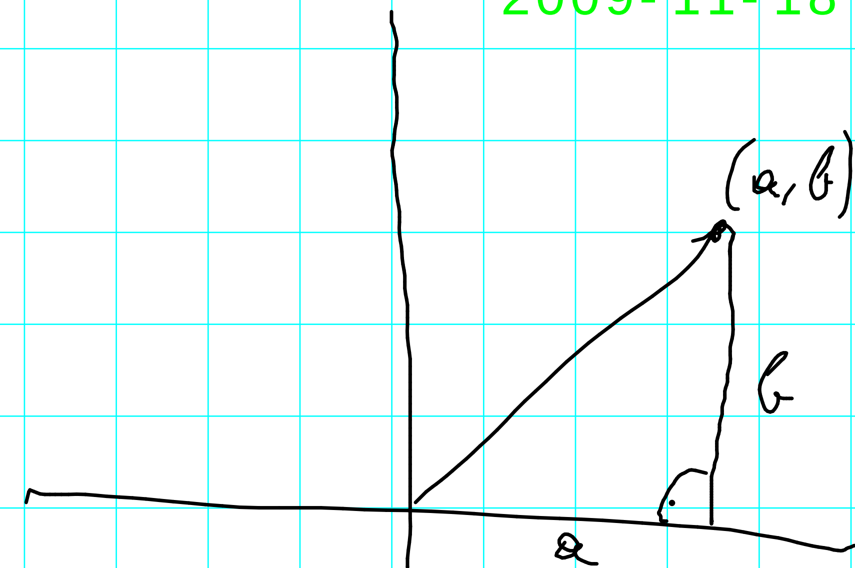
Eigenschaften des Skalarprodukts

Für $\vec{p}, \vec{s}, \vec{t} \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

- $\langle \vec{p} + \vec{s}, \vec{t} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{t} \rangle + \langle \vec{s}, \vec{t} \rangle$
- $\langle \lambda \vec{p}, \vec{s} \rangle = \lambda \langle \vec{p}, \vec{s} \rangle$
- $\langle \vec{p}, \vec{s} \rangle = \langle \vec{s}, \vec{p} \rangle$
- $\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle = p_1^2 + \dots + p_n^2 \geq 0$
- $\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle = 0 \iff \vec{p} = 0.$

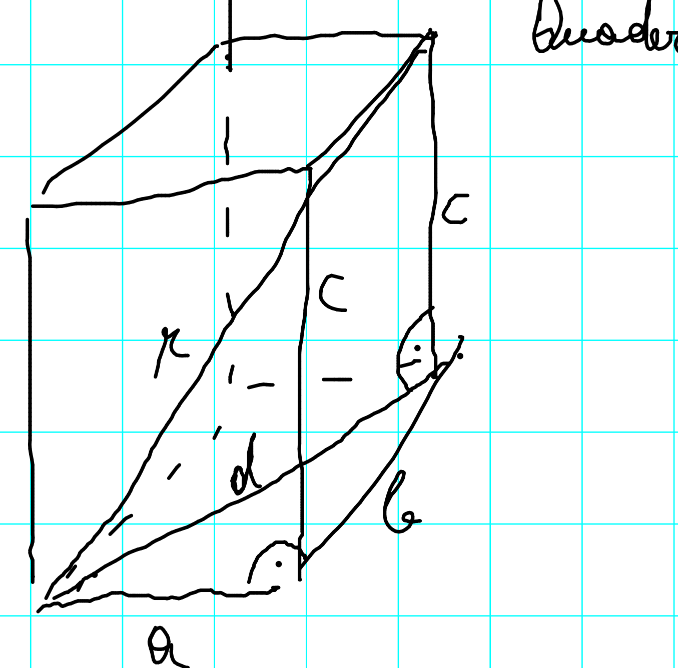
Wir wissen:

$$\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle = p_1^2 + \dots + p_n^2$$



Im Zweidimensionalen $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = a^2 + b^2$
ist das Quadrat des Abstandes vom Ursprung.

Im Dreidimensionalen $\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = a^2 + b^2 + c^2$



$a^2 + b^2 = d^2$ d... Diagonale in Grundfläche

$c^2 + d^2 = r^2$ r... Raumdiagonale
= Länge des Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

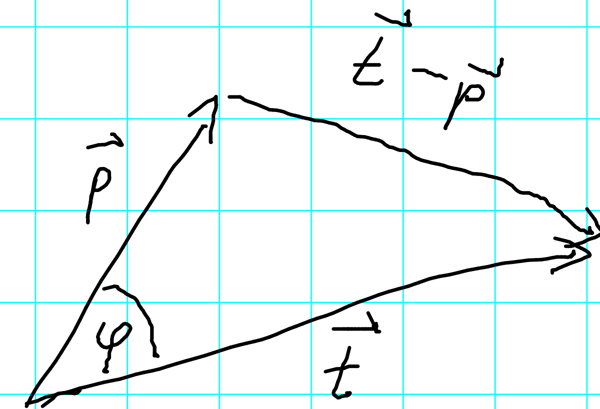
$$\Rightarrow r^2 = c^2 + a^2 + b^2 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Definiere die Norm eines Vektors $\vec{p}$ als $\|\vec{p}\| = \sqrt{\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2}$
Das entspricht laut obiger Überlegung genau der Länge eines 2 oder

3 dimensionaler Vektoren.

Was ist geometrische Bedeutung von $\langle \vec{p}, \vec{t} \rangle$?

Cosinussatz sagt



$$\|\vec{t}-\vec{p}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 + \|\vec{t}\|^2 - 2\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{t}\| \cos\varphi$$

$$\langle \vec{t}-\vec{p}, \vec{t}-\vec{p} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{p} \rangle + \langle \vec{t}, \vec{t} \rangle - 2\|\vec{p}\| \|\vec{t}\| \cos\varphi$$

$$\cancel{\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle} - \langle \vec{p}, \vec{t} \rangle - \langle \vec{t}, \vec{p} \rangle + \cancel{\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle} = \cancel{\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle} + \cancel{\langle \vec{t}, \vec{t} \rangle} - 2\|\vec{p}\| \|\vec{t}\| \cos\varphi$$

$$-\cancel{2} \langle \vec{p}, \vec{t} \rangle = -\cancel{2} \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{t}\| \cos\varphi$$

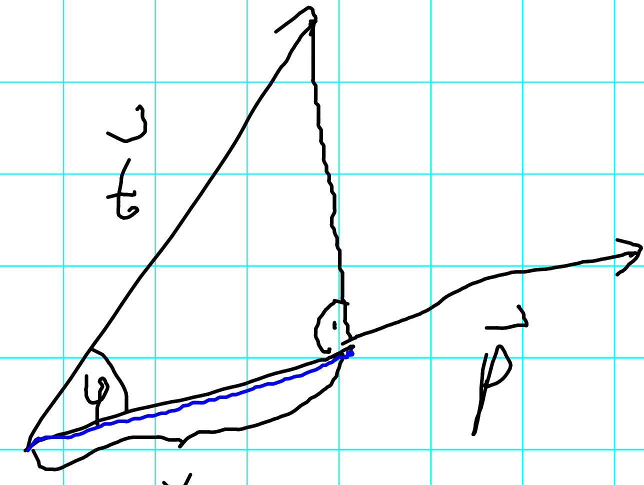
$$\Longrightarrow \qquad \langle \vec{p}, \vec{t} \rangle = \|\vec{p}\| \|\vec{t}\| \cos\varphi.$$

Daher:

- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{\langle \vec{p}, \vec{t} \rangle}{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{t}\|}}$

- zwei Vektoren stehen aufeinander Normal, wenn $\varphi = 90°$, also

$\cos\varphi = 0$, also $\boxed{\langle \vec{p}, \vec{t} \rangle = 0.}$



$\cos\varphi = \frac{x}{\|\vec{t}\|}$

- Wenn $\|\vec{p}\| = 1$, dann folgt

$$\langle \vec{p}, \vec{t} \rangle = \|\vec{t}\| \cos\varphi$$

$$\Longrightarrow \langle \vec{p}, \vec{t} \rangle = \|\vec{t}\| \frac{x}{\|\vec{t}\|} = x$$

$\langle \vec{p}, \vec{t} \rangle =$ Länge der Projektion von $\vec{t}$ in Richtung $\vec{p}$.

- Da $|\cos\varphi| \leq 1$ (mit Gleichheit für $\varphi = 0^\circ, 180^\circ, \ldots$), folgt

$$\left| \frac{\langle \vec{p}, \vec{t} \rangle}{\|\vec{p}\| \cdot \|\vec{t}\|} \right| \leq 1$$

also

$$|\langle \vec{p}, \vec{t} \rangle| \leq \|\vec{p}\| \cdot \|\vec{t}\|$$

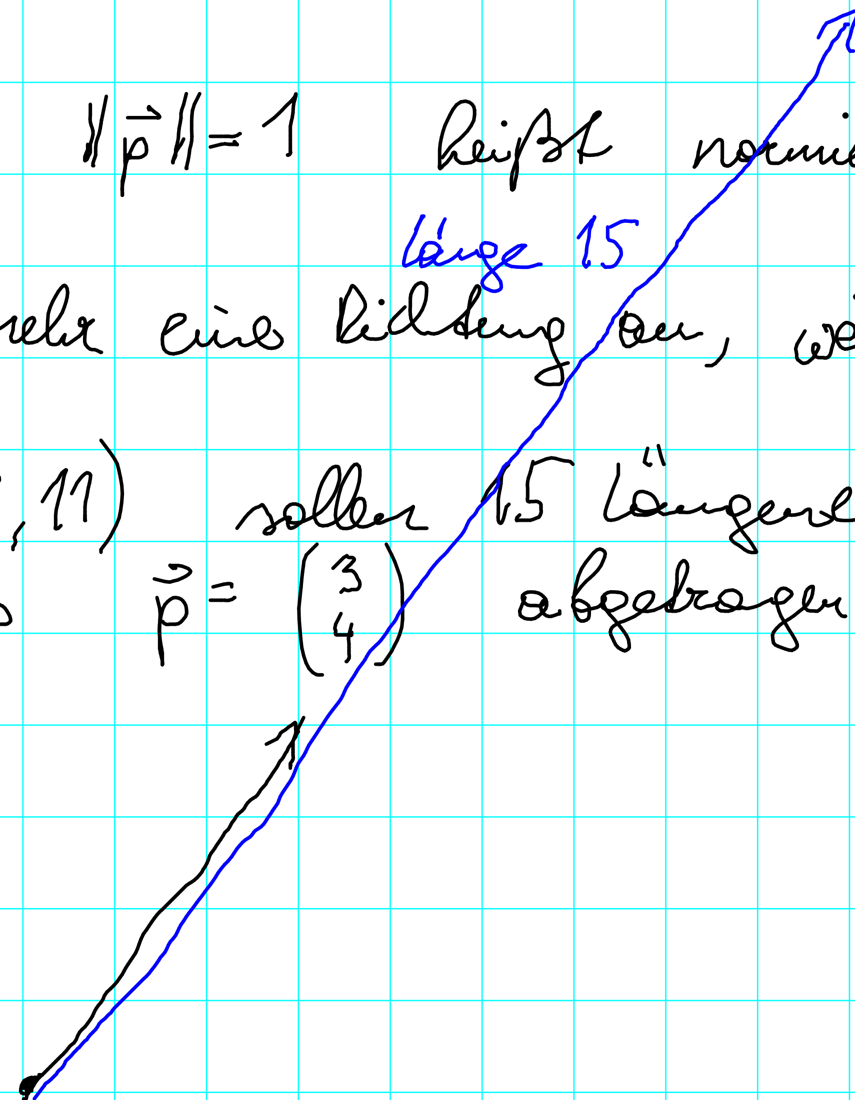
mit Gleichheit genau dann, wenn $\vec{p}$ und $\vec{t}$ zueinander parallel sind.

„Cauchy-Schwarzsche Ungleichung".

<u>Definition</u> Ein Vektor $\vec{p}$ mit $\|\vec{p}\| = 1$ heißt normierter Vektor.

normierter Vektor gibt nur mehr eine Richtung an, weil Länge 1 ist fad.

<u>Beispiel 1)</u> Vom Punkt $(18, 11)$ sollen 15 Längeneinheiten in Richtung des Vektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ abgetragen werden.



Wir gehen zuerst zum normierten Vektor über:

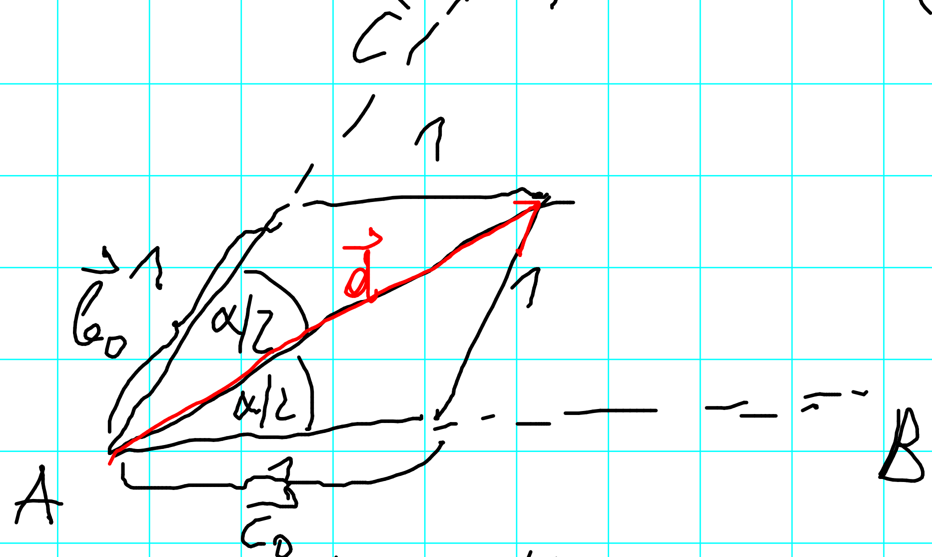
$$\|\vec{p}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

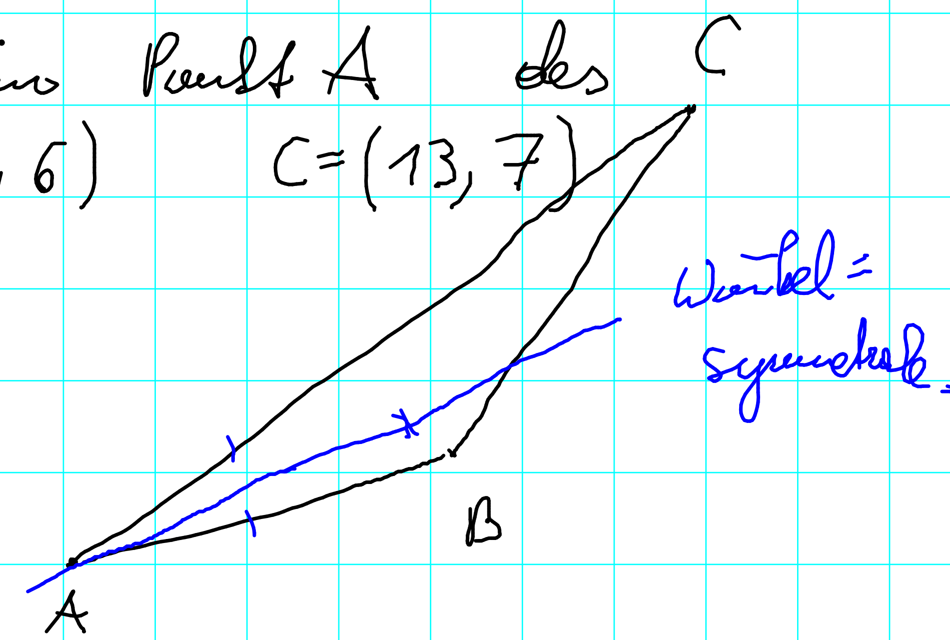
$$\vec{t} = \frac{1}{\|\vec{p}\|} \cdot \vec{p} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$ hat Länge 1 (ist normiert)

gesuchter Punkt: $\begin{pmatrix}18\\11\end{pmatrix} + 15 \cdot \vec{t} = \begin{pmatrix}18\\11\end{pmatrix} + 15 \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}18\\11\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\11\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\23\end{pmatrix}.$$

Beispiel 2. Wir wollen die Winkelsymmetrale im Punkt A des Dreiecks $A = (1, 2)$ $B = (4, 6)$ $C = (13, 7)$





$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \qquad \|\vec{AB}\| = 5 \qquad \vec{c}_0 = \frac{1}{\|\vec{AB}\|}\,\vec{AB} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix}13\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix} \qquad \|\vec{AC}\| = \sqrt{12^2+5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} =$$

$= 13.$

$$\vec{b_0} = \frac{1}{\|\vec{AC}\|} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$$

$$\vec{d} = \vec{b_0} + \vec{c_0} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{65}\begin{pmatrix}60\\25\end{pmatrix} + \frac{1}{65}\begin{pmatrix}39\\52\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{65}\begin{pmatrix}99\\77\end{pmatrix} = \frac{11}{65}\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}$$

Winkelsymmetrale: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}9\\7\end{pmatrix}$

<u>Normalvektoren</u>

Gegeben ein Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$, gesucht ein dazu normaler Vektor $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

Es muss also gelten, dass $\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \right\rangle = 0$.

$$ax + by = 0$$

$$x = -\frac{b}{a}y$$

~~Basis~~

Prinzipiell: für jedes y gibt es ein x;
schön wird es für $y = a$ $(\Rightarrow x = -b)$
oder $y = -a$ $(\Rightarrow x = b)$.

Wir erhalten also die schönen Normalvektoren zu $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

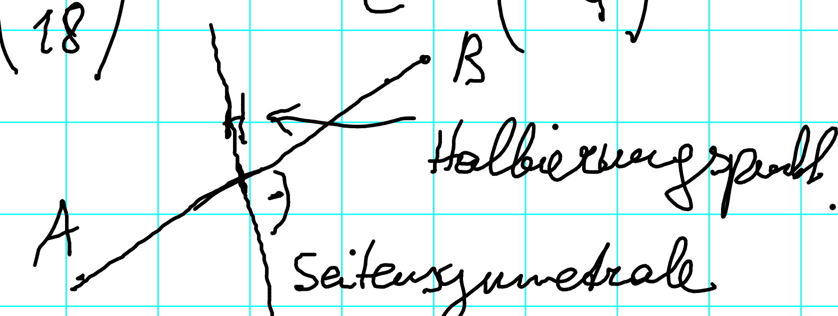
als $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ (Koordinaten vertauschen und ein Minus setzen).

Alle weiteren auf $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ normale Vektoren ergeben sich durch Multiplikation mit Skalaren.

Die beiden hier angegebenen Vektoren haben den Vorzug, dieselbe Norm wie der ursprüngliche Vektor zu besitzen.

<u>Beispiel 1</u>. Dreieck ABC mit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \end{pmatrix}$

Bestimme Seitensymmetrale von AB.



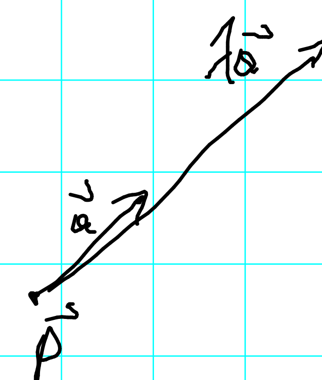
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{H} = \vec{A} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Da Seitensymmetrale normal auf AB steht, hat sie Richtung $\begin{pmatrix} 16 \\ -10 \end{pmatrix}$

Seitensymmetrale: $\vec{x} = \vec{H} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 16 \\ -10 \end{pmatrix}.$

<u>Normalenform der Gerade</u> in $\mathbb{R}^2$ Sei $g: \vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{a}$



Sei $\vec{n}$ Normalvektor zu $\vec{a}$.
Dann ist ein Vektor $\vec{y}$ genau dann parallel zu $\vec{a}$,
wenn $\langle \vec{y}, \vec{n} \rangle = 0$

Also ist ein Punkt $\vec{X}$ genau dann ein Element der Geraden g, wenn $\vec{x}-\vec{p}$ auf $\vec{n}$ normal steht, also

$$\langle \vec{x}-\vec{p}, \vec{n} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle - \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{p}, \vec{n} \rangle$$

„Normalform der Gerade"

Beispiel. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Normalform: $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle$"

$$\Leftrightarrow \quad 8x - 5y = 8 - 10 = -2$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{8x - 5y = -2.}$$

Normalvektoren in $\mathbb{R}^3$.

Wenn nur ein Vektor im $\mathbb{R}^3$ gegeben ist, so steht eine ganze Ebene normal auf diesen Vektor $\Rightarrow$ nicht einmal ansatzweise eindeutiger

Neuer Versuch: Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gegeben.

Wir suchen einen Vektor (Normalvektor) $\vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, sodass $\vec{n}$ sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ normal steht, also

$$\begin{cases} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = 0 \\ \langle \vec{b}, \vec{n} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0 & \Big| \cdot b_1 \\ b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0 & \Big| \cdot a_1 \end{cases} \Big\} -$$

$$(a_2 b_1 - b_2 a_1) y + (a_3 b_1 - a_1 b_3) z = 0.$$

$$y = -\frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_1 - b_2 a_1} z$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1} z$$

Wir können z frei wählen (das ändert nur die Länge des gefundenen Vektors), dann ergibt sich y und in weiterer Folge x.

Wähle $\quad z = a_1 b_2 - a_2 b_1$

dann $\quad y = a_3 b_1 - a_1 b_3$

$$a_1 x + a_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

$$a_1 x + \cancel{a_2 a_3 b_1} - a_1 a_2 b_3 + a_1 a_3 b_2 - \cancel{a_2 a_3 b_1} = 0.$$

$$a_1 x = a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 \qquad \Big| : a_1 \neq 0$$

Hoffnung.

$$x = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

Wir haben erhalten:

$$x = a_2 b_3 - a_3 b_2$$
$$y = a_3 b_1 - a_1 b_3$$
$$z = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

(Annahmen waren $a_1 \neq 0$, $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$)

23.11.2011

Definition Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann definiere

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

wobei $\begin{vmatrix} r & s \\ t & u \end{vmatrix} = ru - st$ (Hauptdiagonale minus Nebendiagonale)

„Vektorprodukt" oder „Kreuzprodukt"

Nach obiger Rechnung steht $\vec{a} \times \vec{b}$ sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ normal.

Wie lang ist $\vec{a} \times \vec{b}$?

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 =$$

$$= a_2^2 \cancel{b_3^2} - 2a_2 \cancel{a_3} b_2 b_3 + a_3^2 \cancel{b_2^2} + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1^2 \cancel{b_3^2} + a_1^2 b_2^2 -$$

$$- 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 \cancel{b_1^2} + a_1^2 b_1^2 - \cancel{a_1^2 b_1^2} + a_2^2 b_2^2 - \cancel{a_2^2 b_2^2} + a_3^2 b_3^2 - \cancel{a_3^2 b_3^2}$$

$$= a_1^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_2^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + a_3^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) -$$

$$- (a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 + a_3^2 b_3^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + 2a_1 b_1 a_3 b_3 + 2a_2 b_2 a_3 b_3)$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle)^2$$

Also:

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2}$$

Sei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, $\varphi \in [0, \pi]$

Dann gilt

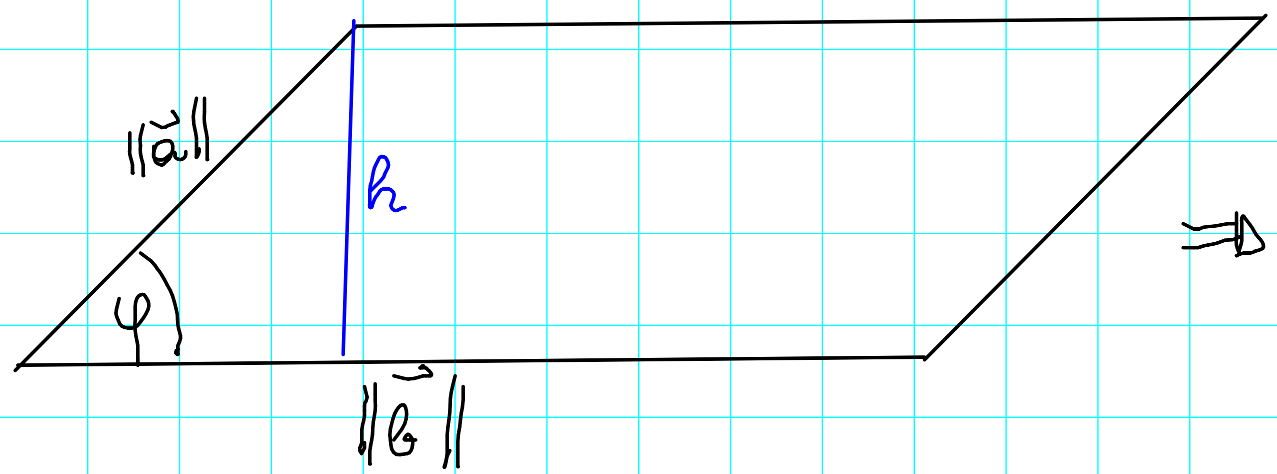
$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \iff \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\varphi$$

Somit

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cdot \cos^2\varphi} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sqrt{1 - \cos^2\varphi} =$$

$$= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sqrt{\sin^2\varphi} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\varphi$$

$$\|\vec a \times \vec b\| = \|\vec a\| \, \|\vec b\| \sin\varphi$$



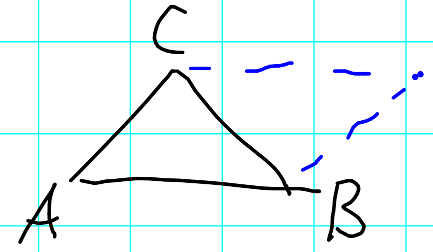
$$\sin\varphi = \frac{h}{\|\vec a\|}$$

$$\Rightarrow \|\vec a\| \, \|\vec b\| \sin\varphi = \|\vec b\| \cdot h =$$

= Fläche des Parallelogramms

Satz. Seien $\vec a, \vec b \in \mathbb{R}^3$. Dann ist $\|\vec a \times \vec b\|$ die Fläche des Parallelogramms, das von $\vec a$ und $\vec b$ aufgespannt wird.

Beispiel. Man berechne die Fläche des Dreiecks mit Eckpunkten $A = (1,1,1)$ $B = (2,3,4)$ $C = (1,3,7)$



Fläche $\triangle = \frac{1}{2}$ Fläche Parallelogramm.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 6 - 3\cdot 2 \\ -(1\cdot 6 - 3\cdot 0) \\ 1\cdot 2 - 0\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Fläche Dreieck} = \frac{1}{2} \| \vec{AB} \times \vec{AC} \| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{36+36+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{76} = \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 19} = \sqrt{19}. \qquad \square$$

<u>Bemerkung</u> Obwohl Kreuzprodukt nur für Vektoren $\in \mathbb{R}^3$ definiert ist, kann man damit auch Flächeninhalte im $\mathbb{R}^2$ ausrechnen:

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Flächeninhalt des Parallelogramms?

$$\text{Fläche} = \left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

Absolutbetrag

<u>Definition</u>. (Spatprodukt) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Dann definiere das Spatprodukt

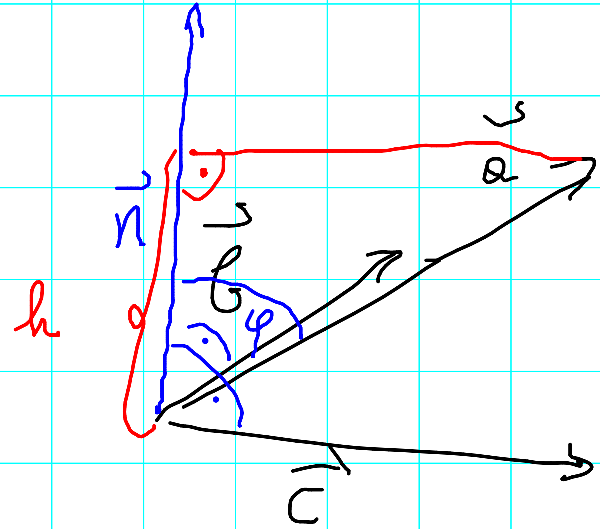
$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle$$

(das ist Abbildung: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$)

<u>Geometrische Deutung des Spatprodukts</u>.

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b} \times \vec{c}\| \cos \varphi, \quad \text{wobei}$$

φ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}\times\vec{c}$ ist.



$\vec{n} = \vec{b}\times\vec{c}$

$$\cos\varphi = \frac{h}{\|\vec{a}\|}$$

h ... Höhe von $\vec{a}$ auf Ebene von b und c.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \underbrace{\|\vec{b}\times\vec{c}\|}_{\text{Fläche des Parallelogramms von } \vec{b} \text{ und } \vec{c}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = \text{(orientiertes) Volumen des Parallelepipeds, das von } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ aufgespannt wird.}$$

positives Vorzeichen, wenn $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ entsprechend der Rechtsregel (Daumen, Zeigefinger, Mittelfinger einer rechten Hand) orientiert sind.

<u>Beispiel</u> (fad). Volumen des Parallelepipeds, das von $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$ aufgespannt wird, über Spatprodukt.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= 2 \cdot 15 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 30$$

✓

<u>Bemerkung.</u> Reihenfolge der Vektoren bei Kreuz- und Spatprodukt ist wesentlich:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

<u>Ebenengleichung in Normalform.</u>

$\varepsilon: \quad \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ ... Ebene in Parameterform.

$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ ... Normalvektor.

Die Ebene ist die Menge aller Punkte $\vec{x}$, sodass $\vec{x}-\vec{a}$ normal auf $\vec{n}$ steht, also

$$\varepsilon := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}-\vec{a}, \vec{n} \rangle = 0\} =$$

$$= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle\}$$

Normalform der Ebenengleichung: $\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle$

bzw. $(\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{a}, \vec{v}, \vec{w})$.

<u>Beispiel.</u> Ebene ε: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalform der Ebenengl:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad -x + y + z = -1 + 2 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-x + y + z = 4.}$$

Zur Unterhaltung: setze Parameterform in Normalform ein:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \lambda + \mu \\ y &= 2 + \mu \\ z &= 3 + \lambda \end{aligned}$$

$$-(1 + \lambda + \mu) + (2 + \mu) + (3 + \lambda) \overset{!}{=} 4$$

$$-1 - \cancel{\lambda} - \cancel{\mu} + 2 + \cancel{\mu} + 3 + \cancel{\lambda} \overset{!}{=} 4$$

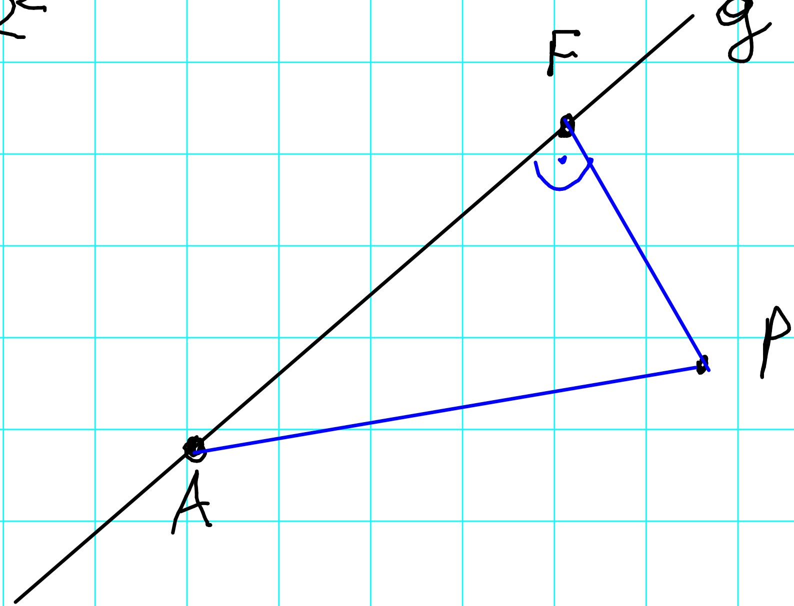
$$4 = 4$$

.... beruhigend...

$\square$

Abstand zwischen Punkt und Gerade im $\mathbb{R}^2$ bzw. zwischen Ebene und Punkt im $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2$



$$\|\overrightarrow{AP}\|^2 = \underbrace{\|\overrightarrow{AF}\|^2}_{\geq 0} + \|\overrightarrow{FP}\|^2 \geq \|\overrightarrow{FP}\|^2$$

Pythagoras

d.h. Abstand zwischen P und beliebigen Punkt A auf Gerade ist $\geq$ Abstand zwischen P und Lotfußpunkt F

also: „kürzester Abstand ist Normalabstand"

Sei die Gerade durch einen Punkt $\vec{a}$ und Normalvektor $\vec{n}$ gegeben.
$\langle \vec{n}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle$ Normalform,

$d :=$ Abstand $= \|\overrightarrow{FP}\| =$ Länge der Projektion von $\overrightarrow{AP}$ auf $\vec{n}$ $=$

$$= \left| \frac{\langle AP, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|} \right|$$

$$d = \left| \frac{\langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|} \right| = \left| \frac{\langle \vec{p} - \vec{a}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|} \right| = \left| \frac{\langle \vec{p}, \vec{n} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle}{\|\vec{n}\|} \right|$$

Beispiel. $g: \quad 2x + y = 7 \qquad P = (3,1) \qquad Q = (4,1)$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Abstände von P bzw. Q zu g.

$$d_P = \left| \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle - 7}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} \right| = \frac{7-7}{\sqrt{5}} = 0.$$

P liegt auf Gerade, [nur Einsetzen in Geradengl. hätte gereicht]

$$d_Q = \left| \frac{9-7}{\sqrt{5}} \right| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Abstand $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

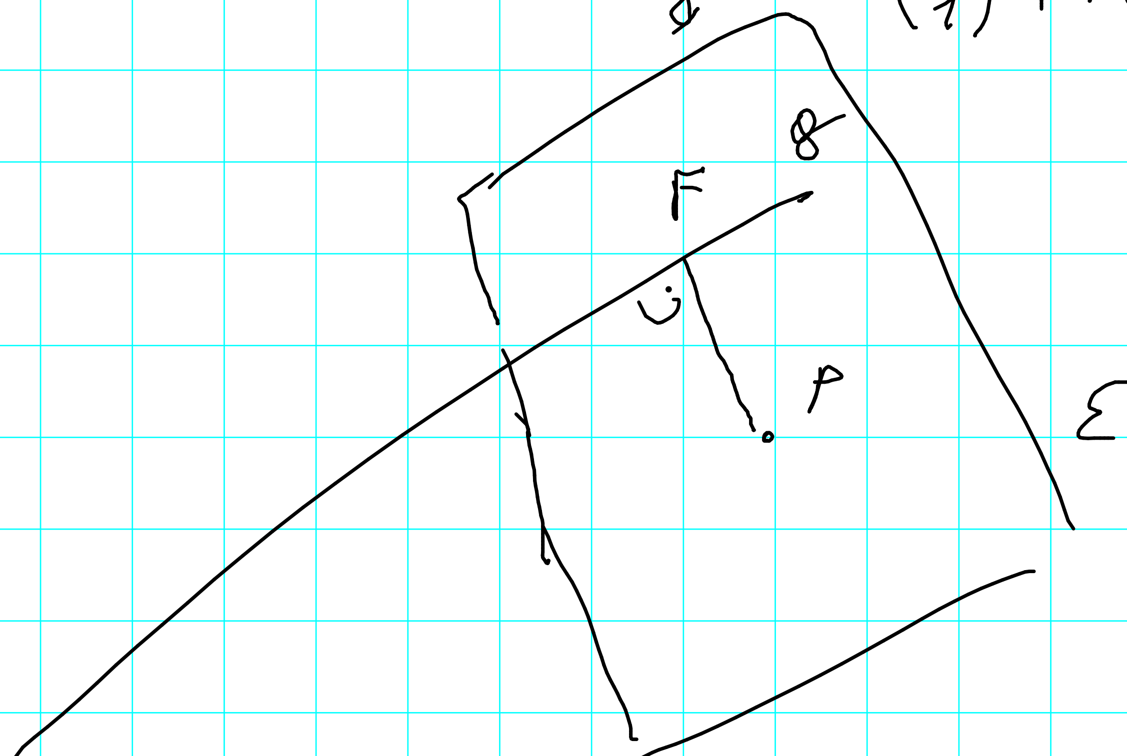
Bemerkung • Für Ebene in Normalform im $\mathbb{R}^3$ funktioniert es ganz gleich

• Abstand $= \left| \dfrac{\text{„Abweichung in Geradengl."}}{\text{Norm des Normalvektors}} \right|$

- Für Abstand Gerade im $\mathbb{R}^3$ zu Punkt im $\mathbb{R}^3$ funktioniert das so nicht, weil Gerade im $\mathbb{R}^3$ keine Normalform hat

<u>Beispiel</u>. Man bestimme Normalabstand zwischen Punkt $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$



Sei ε ... Ebene, die auf Gerade normal steht und durch P geht.

Lotfußpunkt F ist dann Schnittpunkt zwischen Gerade und Ebene.

$\vec{n}_{Ebene}$ = Richtungsvektor der Gerade = $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

ε: $\quad \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$

$\Longleftrightarrow \quad \varepsilon: \quad x + y + z = 6.$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Schnittpunkt mit g:

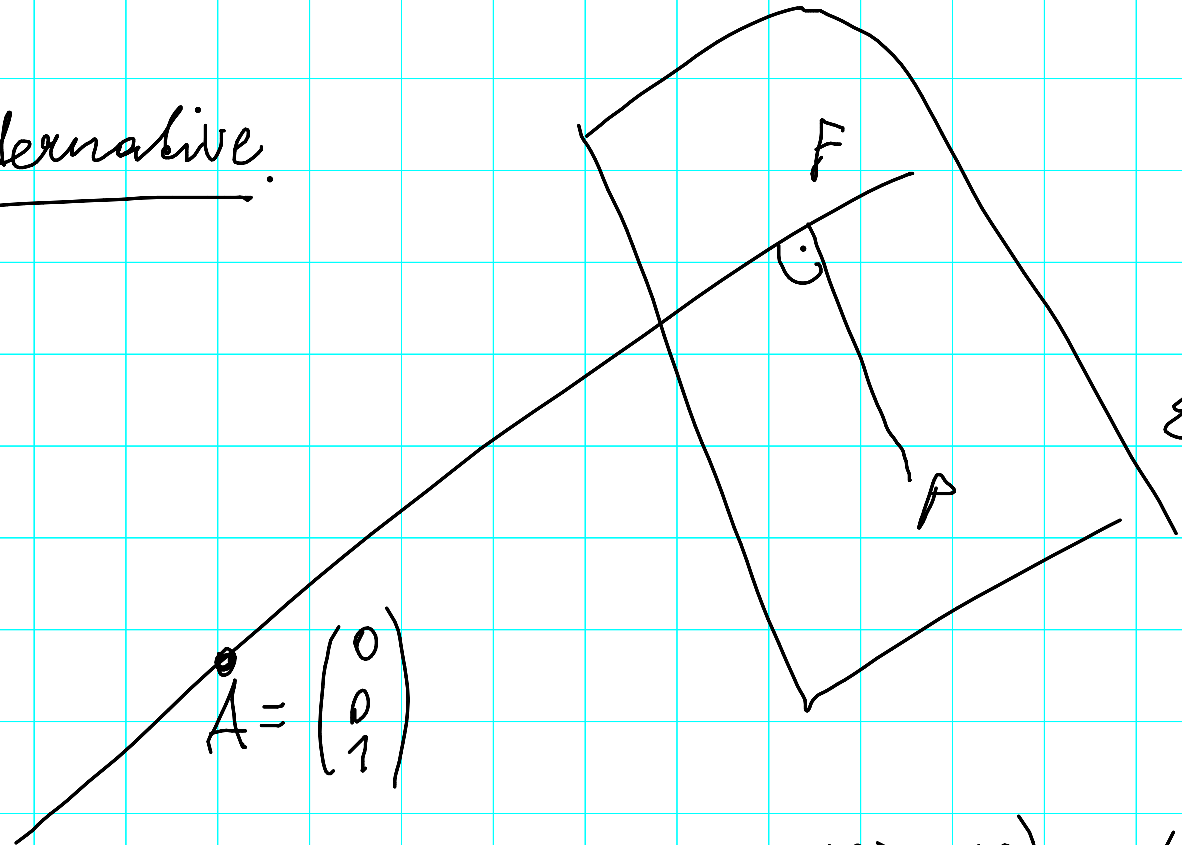
$$(0+\lambda) + (0+\lambda) + (1+\lambda) = 6$$
$$3\lambda + 1 = 6$$

Somit $\quad \lambda = \frac{5}{3}.$

$$F = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/3\\5/3\\8/3\end{pmatrix}$$

$$\text{Abstand} = \|\overrightarrow{FP}\| = \left\| \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5/3\\5/3\\8/3\end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\1/3\end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{3}\sqrt{4+1+1} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Alternative



$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|AF\|$ = Normalabstand von A zu ε

Pythagoras:

$$\|\vec{FP}\| = \sqrt{\|\vec{AP}\|^2 - \|\vec{AF}\|^2}$$

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{AP}\|^2 = 9$$

$$\|\vec{AF}\| = \left| \frac{1-6}{\sqrt{3}} \right|$$

$$\|\vec{AF}\|^2 = \frac{25}{3}.$$

$$\|\vec{FP}\| = \sqrt{9 - \frac{25}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$