

Kap 5 Kegelschnitte

5.1. Kreis

Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem gegebenen Mittelpunkt gegebenen Abstand haben.

Koordinatisierung. Mittelpunkt $M = (a, b)$ } gegeben,
 Radius $r > 0$

$$\text{Kreis} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = r \right\}.$$

Formelgleichung um:

$$\left\| \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} \right\| = r$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$



$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Kreisgleichung.

Beispiel 1. Gegeben: Gln $2x^2 + 9x + 2y^2 + 5y = 30$. Ist das ein Kreis?
Mittelpunkt? Radius?

$$\underline{x}^2 + \frac{9}{2}\underline{x} + \underline{y}^2 + \frac{5}{2}\underline{y} = 15$$

$$\left(x + \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{81}{16} + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 15$$

$$\left(x - \left(-\frac{9}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{5}{4}\right)\right)^2 = 15 + \frac{53}{8}$$

$$= \frac{173}{8} = \left(\sqrt{\frac{173}{8}}\right)^2$$

Also: Kreis mit Mittelpunkt $\left(-\frac{9}{4}, -\frac{5}{4}\right)$ und Radius $\sqrt{\frac{173}{8}}$.

Beispiel 2, Gegeben seien 3 Punkte $A = (4, 5)$ $B = (5, 4)$ $C = (-2, 5)$.
Gesucht: Gleichung des Kreises durch diese 3 Punkte.

Variante 1: Umkreisungsmittelpunkt ist Schnittpunkt der Seitenhalbierenden
(Seitenhalbierenden; normal auf jeweilige Seite)
Radius als Abstand zwischen Umkreisungsmittelpunkt und einem Eckpunkt.

Variante 2: Unbestimmter Koeffizient. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
 $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 = r^2$

(A)	I	$16 - 8a + a^2 + 25 - 10b + b^2 = r^2$
(B)	II	$25 - 10a + a^2 + 16 - 8b + b^2 = r^2$
(C)	III	$4 + 4a + a^2 + 25 - 10b + b^2 = r^2$

$$\begin{array}{l} \text{I} - \text{II} \\ \text{I} - \text{III} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2a - 2b = 0 \\ 12 - 12a = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow a = 1 \end{array}$$

$a = 1$; $a = b = 1$. Mittelpunkt $(1, 1)$.
in III eingesetzt: $\cancel{4 + 4} + 1 + \cancel{25 - 10} + 1 = r^2 \Rightarrow \text{Radius } 5$

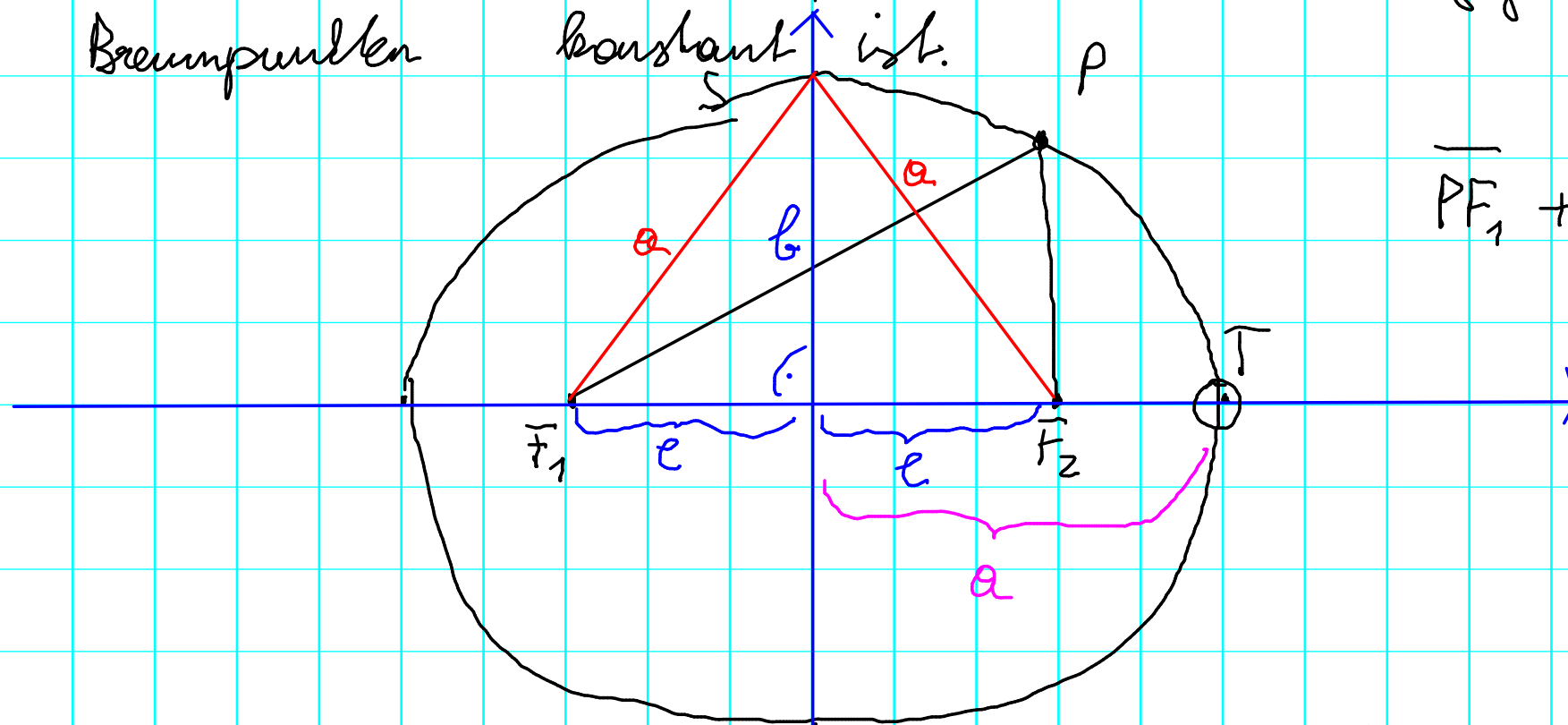
Kreisgleichung
oder in ausm. Form

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 23$$

5.2. Ellipse

Eine Ellipse ist die Menge aller Punkte in der Ebene, sodass die Summe der Abstände von zwei gegebenen Brennpunkten konstant ist.



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{const.}$$

Wir betrachten den Fall $F_1 = (-e, 0)$ $F_2 = (e, 0)$
Die Summe der Abstände heiße $2a$.

Schnittpunkt mit y-Achse:
aus Symmetriegründen gilt

Somit:

$$\boxed{e^2 + b^2 = a^2}$$

$$S = (0, b) \\ \overline{SF_1} = \overline{SF_2} = a$$

Schnittpunkt mit positiver x-Achse: $T = (x, 0)$ für passendes x .

$$\overline{TF_1} = x + e \\ \overline{TF_2} = x - e$$

$$2a = \overline{TF_1} + \overline{TF_2} = 2x$$

Schnittpunkt mit positiver x-Achse:

$$\Rightarrow x = a. \\ F(a, 0).$$

a und b heißen auch Halbachsenlängen der Ellipse.

Gleichung der Ellipse:

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 2a$$

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a \quad |^2$$

$$x^2 + \cancel{2ex + e^2} + y^2 + 2\sqrt{((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2)} + x^2 - \cancel{2ex + e^2} + y^2 = 4a^2$$

$$\sqrt{((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2)} = 2a^2 - x^2 - y^2 - e^2$$

Es muss $2a^2 - e^2 > x^2 + y^2$ gelten.

Quadriere.

$$\begin{aligned} (x+e)^2(x-e)^2 + y^2((x+e)^2 + (x-e)^2) + y^4 &= (2a^2 - e^2)^2 - 2(2a^2 - e^2)(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^2 \\ (x^2 - e^2)^2 + y^2(x^2 + 2e^2 + x^2 - 2e^2) + y^4 &= \\ &= 4a^4 - 4a^2e^2 + e^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 + 2e^2x^2 + 2e^2y^2 + x^4 + 2xy^2 + y^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^4 - 2e^2x^2 + e^4 &= 4a^4 - 4a^2e^2 + e^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 + 2e^2x^2 + x^4 \\ 4x^2(a^2 - e^2) + 4y^2a^2 &= 4a^2(a^2 - e^2) \quad | : a^2(a^2 - e^2) \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1.$$

Wegen $e^2 + b^2 = a^2$ ergibt sich

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

oder

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Kann nehmen Kreis mit Radius 1,
multipliziere x-Koordinate mit a
und y-Koordinate mit b,
und erhalte Ellipse mit
Hauptachsenlängen a und b.

5.3. Hyperbel:

Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte, sodass der
Absolutbetrag der Differenz zu zwei gegebenen Brennpunkten
konstant ist.

$$\begin{aligned} F_1 &= (-c, 0) \\ F_2 &= (c, 0) \end{aligned}$$

$$|\overline{F_1 P} - \overline{F_2 P}| = 2a.$$

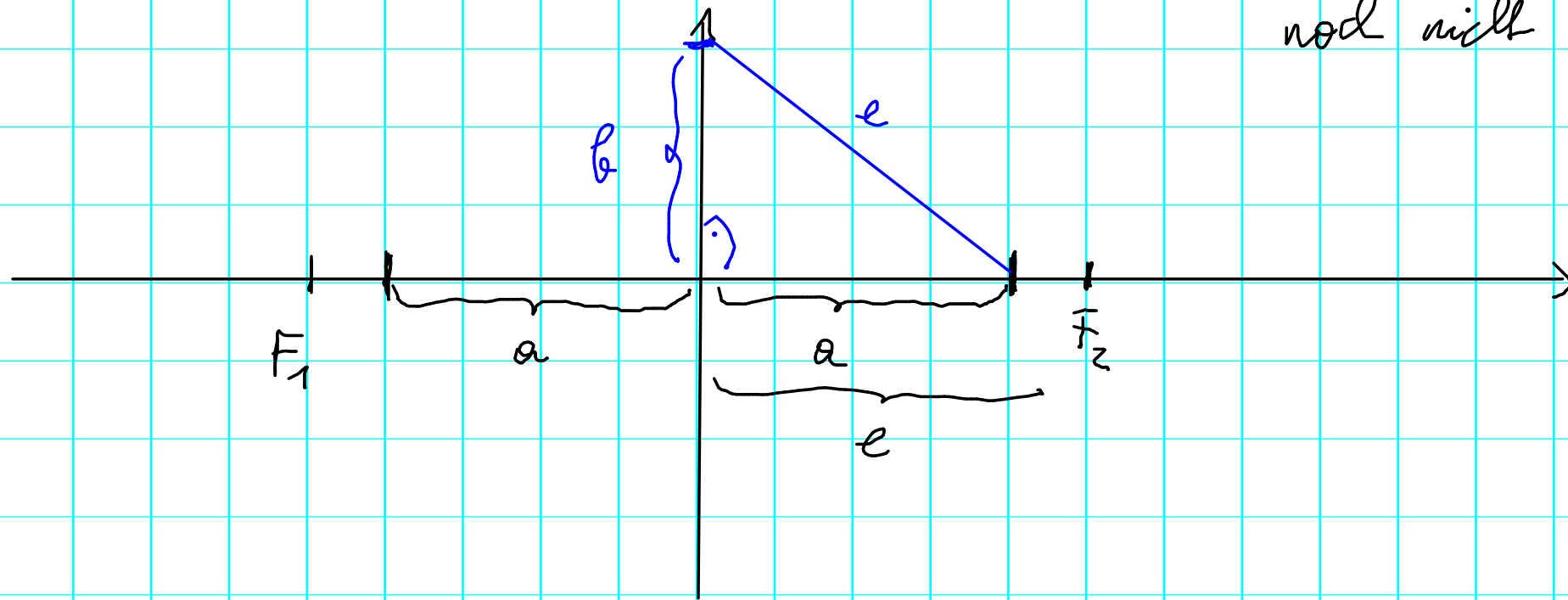
Gleiche Bedingung wie oben:
erhalte.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$$2a^2 - c^2 - x^2 - y^2 < 0$$

wobei wir diesmal b

noch nicht definiert haben



Definiere $c^2 - a^2 =: b^2$

Hyperbelgleichung:
 $c^2 = a^2 + b^2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Für gilt

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

für $x > a$

$$y = \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2}$$

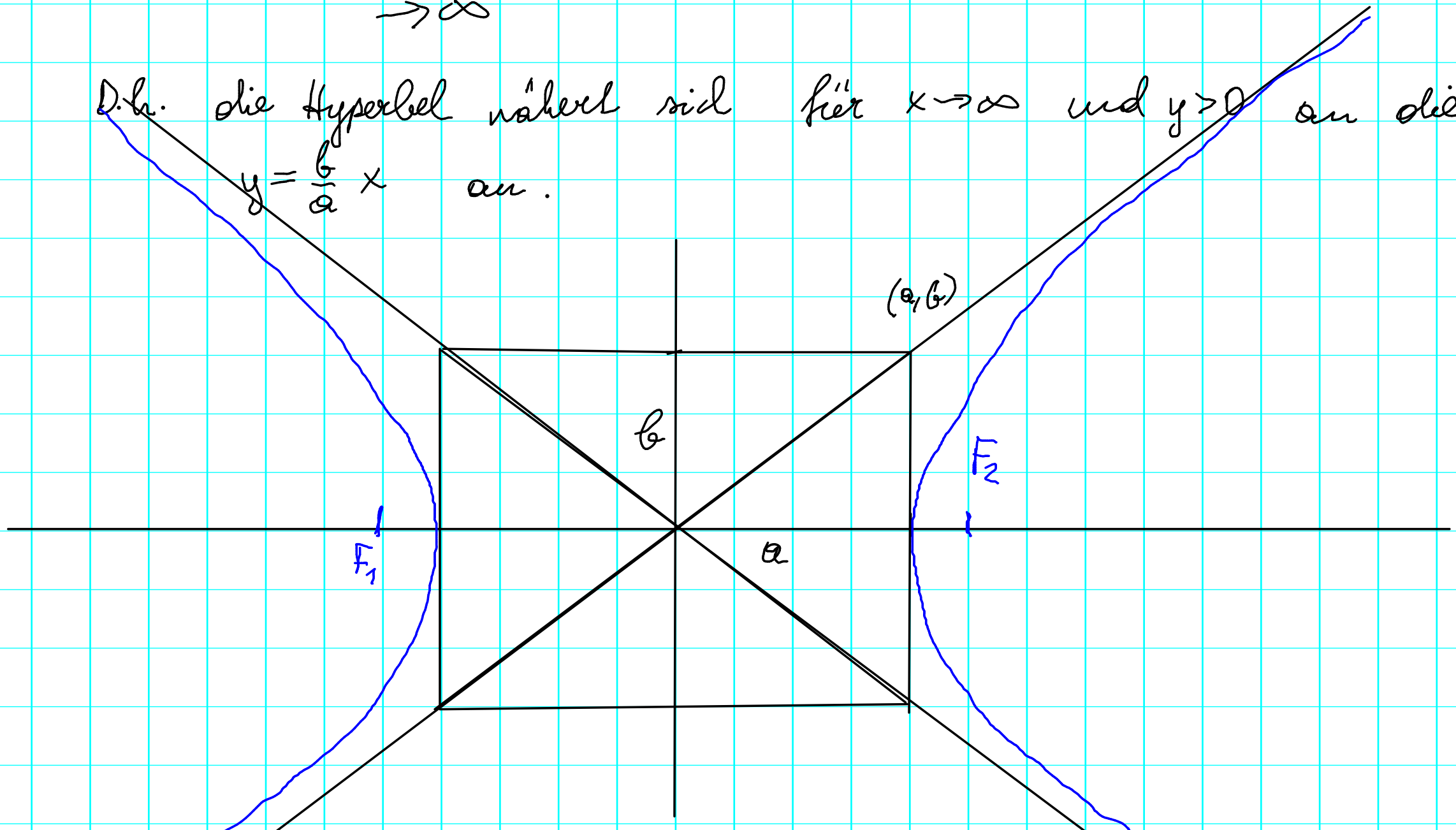
Betrachte

Differenz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{b}{a} x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2} - \frac{b}{a} x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2}{\underbrace{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2}}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{b}{a} x}_{\rightarrow \infty}} = 0.$$

D.h. die Hyperbel nähert sich für $x \rightarrow \infty$ und $y > 0$ an die Gerade $y = \frac{b}{a} x$ an.



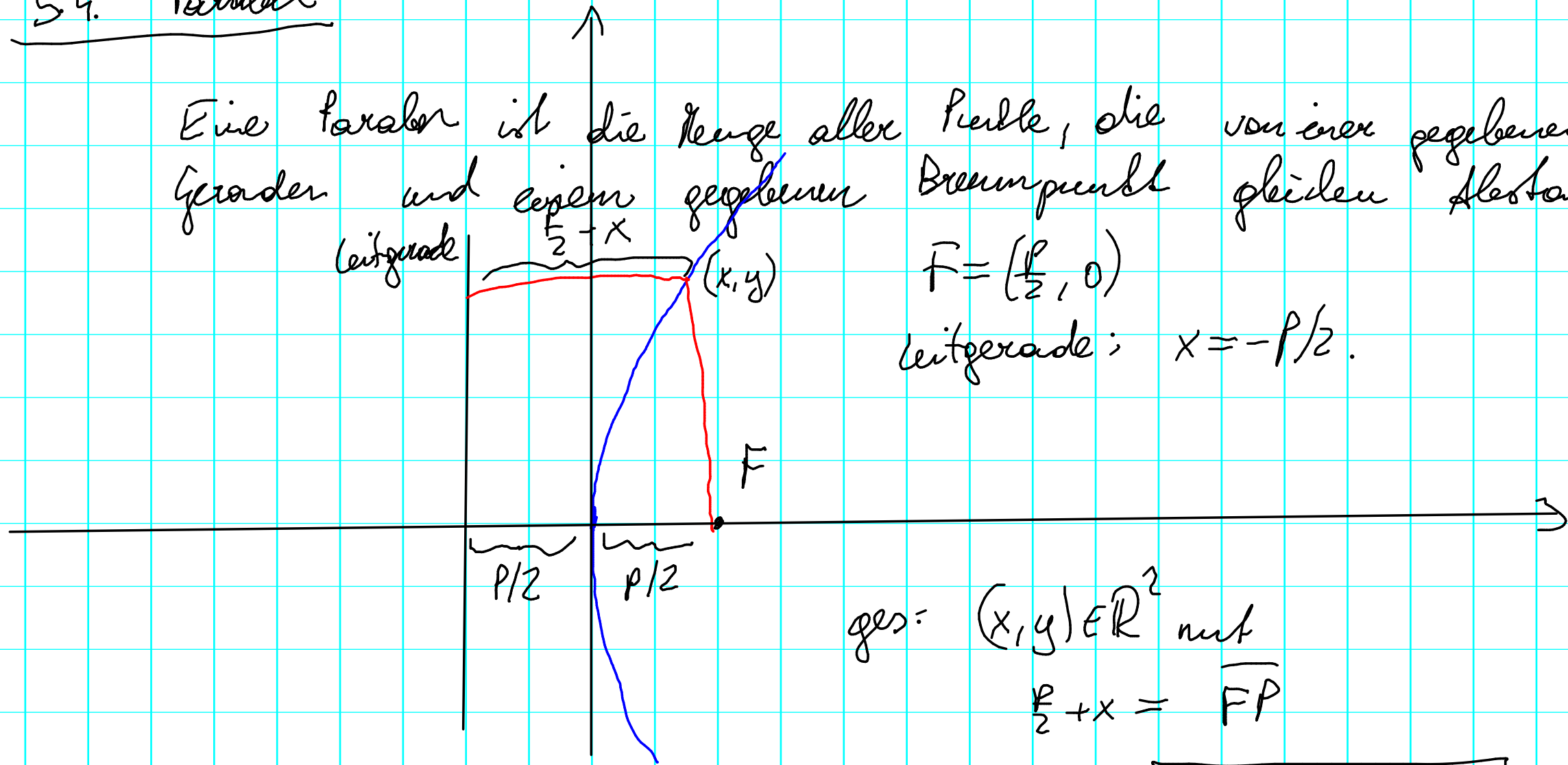
54. Parabel

Eine Parabel ist die Menge aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden und einem gegebenen Brennpunkt gleichen Abstand haben

Leitgerade

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$$

$$\text{Leitgerade: } x = -p/2.$$



$$\text{ges: } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ mit}$$

$$\frac{p}{2} + x = \overline{FP}$$

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$\cancel{x^2} + px + \cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2$$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

