12.10.2011

Kap I. Terme, Gleichungen, Ungleichungen

I.1 Termen

Definition. Ein Term ist ein wohlgeformter Ausdruck, der aus Konstanten, Variablen, mathematischen Operatoren, Funktionen und Klammern besteht.

Beispiele.

1) 2011 — ja
2) $2x+17$ — ja
3) $2x+17=2011$ — nein, = verboten
4) $2x+++ \; 2011$ — nein, nicht wohlgeformt
5) $(2x^2+3x)(7x+11)+2011+42x^{42}$ — ja
6) $((2x+5)(7x+13)+2011$ — nein, Klammer fehlt
7) $(\sin(x))^2+(\cos(x))^2$ — ja

Für Variable in einem Term können Werte eingesetzt werden

Beispiel. Setze $x=7$ in $6x+17$: erhalte 59

Gegebenenfalls muss die Definitionsmenge beachtet werden, zB

$$\frac{7}{x-42} \qquad \text{Definitionsmenge: } \mathbb{R}\setminus\{42\}$$

1.2. Gleichungen

Definition. Eine Gleichung sind zwei Terme, die durch ein „=" verbunden sind

Beispiele.

1) $42x + 7 = 91$
2) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
3) $\sqrt{x^2+17} + 42 = 0$

lauter Glg.

2) gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ .... Identität

3) gilt für kein $x \in \mathbb{R}$ (weil $\sqrt{} \geq 0$, daher $\sqrt{x^2+17}+42$ immer positiv).

1) gilt genau für $x = 2$.

$$42x + 7 = 91 \quad | -7$$
$$\Leftrightarrow \quad 42x = 84 \quad | :42$$

$\iff \quad x = 2 \quad)$

<u>Definition:</u> Die Lösungsmenge einer Gleichung ist Menge der Werte der Variablen, bei deren Einsetzen in die Terme links und rechts des Gleichheitszeichens derselbe Wert entsteht.

Bei 1): $\quad L = \{2\}$

2): $\quad L = \mathbb{R}^2 \qquad$ (2 Variablen!)

3): $\quad L = \emptyset$,

Zum Lösen einer Gleichung führe Äquivalenzumformungen durch

- auf beiden Seiten dieselben Werte addieren oder subtrahieren
- —— " —— $\neq 0$ multiplizieren bzw. dividieren

<u>Beispiel 4</u>

$$\frac{x+7}{x+3} = 3 \quad \Big| \cdot (x+3) \qquad \text{Definitionsmenge } \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$x + 7 = 3x + 9 \quad \Big| -7 - 3x$$

$$-2x = 2 \qquad |:(-2)$$
$$x = -1$$

$L = \{-1\}$ (kein Problem mit Def. Menge).

Probe ist mathematisch nicht erforderlich, weil nur Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden.

Beispiel 5.

$$\sqrt{x} = -3 \qquad |^2$$

$$x = 9$$

$L = \cancel{\{9\}}$ 9 besteht die Probe nicht.

Wir haben hier quadriert, Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung; durch Quadrieren können unerfüllbare Gleichungen plötzlich Lösungen bekommen ... Probe erforderlich (oder sehr scharf mitdenken)

Beispiel 6.

$$(x+5)^2 = (x+3)^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$\pm(x+5) = \pm(x+3) \qquad \pm \text{ unabhängig}$$

Fall 1. „++" $\quad x+5 = x+3 \quad$ keine Lösung

Fall 2. „−−" $\quad$ entspricht Fall 1, keine Rechnung erforderlich

Fall 3. „+−" $\quad x+5 = -(x+3)$

$$2x = -8$$

$$\underline{\underline{x = -4}}$$

Probe: $1^2 = (-1)^2$ ✓

Fall 4 „−+" = Fall 3.

$$L = \{-4\}.$$

Wurzelziehen ist keine Äquivalenzumformung, „±" einführen, Probe machen (oder scharf mitdenken)...

Variante

$$(x+5)^2 = (x+3)^2$$

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 6x + 9 \qquad \Big|\, -x^2 - 6x - 25$$

$$4x = -16 \qquad \Big|\, :4$$

$$x = -4 \qquad L = \{-4\}$$

1.3. Polynome und polynomielle Gleichungen

Definition: Ein (univariates) Polynom ist ein Term

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_d x^d,$$

wobei: x ... Variable

$a_0, \dots, a_d$ ... konstante Werte „Koeffizienten"

$a_d \neq 0$

d ... heißt „Grad des Polynoms"

a_d ... —"— „Leitkoeffizient"

$a_d x^d$ —"— „Leitterm"

Das Nullpolynom 0 habe Grad $-\infty$

Polynome vom Grad 1 heißen lineare Polynome
2 —"— quadratische —"—

Zwei Polynome sind gleich, wenn alle Koeffizienten gleich sind.

Beispiele.

1) $12x + 42$ Polynom, Grad 1, Leitkoeff 12
Leitterm $12x$

2) $27x^2 + 20x + 11$ Polynom, Grad 2, Leitkoeff 27

3) 2011 Polynom vom Grad 0.

4) $12 + 10x + 2011x^2 + 0x^3$ Polynom vom Grad 2, Leitkoeff 2011

5) $\sin(x) + 2011$ Kein Polynom

Operationen mit Polynomen

• Einsetzen von Werten (z.B. setze $x = -1$ in $12x + 42$; ergibt 30)

-) Polynome addieren / subtrahieren:

$$(12x+42)+(27x^2+20x+11)=27x^2+32x+53$$

-) Polynome multiplizieren:

$$(3x+5)\cdot(2x^2+7x+1)=6x^3+(\underbrace{5\cdot 2+3\cdot 7}_{31})x^2+(\underbrace{5\cdot 7+3\cdot 1}_{38})x+5.$$

(alles mit allem multipliziert und zusammengefasst).

Polynomdivision

Bsp 6.

$x(x+7)$:

$-4(x+7)$:

$$x^2/x = x$$

$$(x^2+3x+2):(x+7)=x-4+\frac{30}{x+7}$$

$$\begin{array}{l} -x^2 - 7x \\ \hline \quad -4x+2 \\ \quad +4x+28 \\ \hline \qquad 30 \end{array}$$

also: $$\frac{x^2+3x+2}{x+7} = x-4+\frac{30}{x+7}$$

(zur Beruhigung die Probe: $x^2+3x+2 \overset{!}{=} 30 + \underbrace{(x+7)(x-4)}_{x^2+3x-28}$ ✓)

Bsp 7.

$$(x^3+3x+5):(x^2+2x+1) = x-2+\frac{6x+7}{x^2+2x+1}$$

$$\begin{array}{r} -x^3-2x^2-x \\ \hline -2x^2+2x+5 \\ +2x^2+4x+2 \\ \hline 6x+7 \end{array}$$

Also: Bilde Quotienten der Leitterme, subtrahiere Ergebnis mal Divisor (= Nenner) von Dividend (= Zähler) und fahre fort, bis Grad des Zählers kleiner als Grad des Nenners.

Definition. Sei $p(x)$ ein Polynom in x. Die Werte $x \in \mathbb{R}$, für die $p(x)=0$ gilt, heißen die Nullstellen des Polynoms.

Wie finden wir alle Nullstellen eines Polynoms?

linearen Polynomen $\quad 2x+8$

$2x+8=0 \quad \mid -8$, dann $\mid :2$, ergibt $x=-4$
(leicht)

quadratische Polynome $\quad x^2+6x+5=0$

Lösungsformel $\quad x^2+px+q=0$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$ „kleine"

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ „große"

oder direkt

$$x^2+6x+5=0 \qquad |+9$$

$$(x^2+6x+9)+5=9$$

$$(x+3)^2+5=9 \qquad |-5$$

$$(x+3)^2=9-5$$

$$x+3=\pm\sqrt{9-5}$$

$$x=\underbrace{-3}_{=-\frac{p}{2}}\pm\sqrt{\underbrace{9}_{\left(\frac{p}{2}\right)^2}-\underbrace{5}_{=q}}=-3\pm\sqrt{4}=-3\pm 2$$

$$L=\{-5,-1\}$$

Polynome höheren Grades

Beispiel:
$$x^3+4x^2+5x+2=0$$

Suche eine Nullstelle durch Probieren.

Vorschläge $-1, -2, 2, 1, 0$

bei diesem Polynom: sicher keine positiven Nullstellen
(alle Koeffizienten positiv, also Polynom für $x>0$ sicher positiv)

Probiere -1: $(-1)^3 + 4(-1)^2 + 5(-1) + 2 = -1+4-5+2 = 0$

juhu,

Polynomdivision:

$x - (-1)$

$$
\begin{array}{l}
(x^3+4x^2+5x+2):(x+1) = x^2+3x+2 \\
-x^3 \mp x^2 \\
\hline
\quad 3x^2+5x+2 \\
\quad -3x^2 \mp 3x \\
\hline
\qquad 2x+2 \\
\qquad -2x \mp 2 \\
\hline
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Somit: $x^3+4x^2+5x+2 = (x^2+3x+2)(x+1) + 0 \qquad (*)$

(hier muss Rest 0 auftreten: Rest ist jedenfalls eine Konstante, weil wir bei Division durch lin. Poly $x+1$ erst bei einer Konstanten aufhören (dürfen))

Bei Einsetzen von $x=-1$ auf linken Seite von (*) (weil es eine Nullstelle war)

links: 0

$$\underbrace{(x^2+3x+2)}_{\text{egal}}\underbrace{(x+1)}_{=0 \text{ bei } x=-1} : 0$$

Daher muss der konstante Rest gleich 0 sein).

Also. $x^3+4x^2+5x+2=(x^2+3x+2)(x+1)$

Das Produkt auf der rechten Seite ist genau dann $=0$, wenn einer der beiden Faktoren $=0$ ist, also

$x+1=0$ oder $x^2+3x+2=0$

$(\Leftrightarrow x=-1)$

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=$$

$= -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ also $x = -2$ oder $x = -1$.

Nullstellen des ursprünglichen Polynoms: -2 und -1 (doppelt).

Wir hätten auch bei der quadr. Gleichung x^2+3x+2 zur Aufteilung abdividieren können:

$$(x^2+3x+2):(x+2) = x+1 \quad \Rightarrow \quad x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$$

$$\begin{array}{l} -(x^2+2x) \\ \hline \quad x+2 \\ -(x+2) \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

insgesamt: $x^3+4x^2+5x+2 = (x+1)(x^2+3x+2) = (x+1)(x+1)(x+2) = (x+1)^2(x+2)$

<u>Allgemeine Vorgangsweise</u> zur Lösung von $p(x)=0$.

1) Errate eine Lösung α (vgl. Bemerkungen unten)

2) Polynomdivision: $p(x) : (x-\alpha) = q(x)$

für passendes Polynom $q(x)$. Es muss Rest 0 auftreten. (sonst Rechenfehler)

3) Erhalte Faktorisierung: $p(x) = q(x) \cdot (x-\alpha)$.

Zurück an den Start mit $q(x)$

4) Nach genügend vielen Schritten:

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \cdots (x-\alpha_d),$$

und die Nullstellen sind $\alpha_1, \dots, \alpha_d$.

18.10.2011

Bemerkungen: 1) Ab Quadrat. Glg kann man mit Lösungsformel arbeiten
2) Es gibt (furchtbare) Lösungsformeln für Glg vom Grad 3 und 4
3) Ab Grad 5 können keine Lösungsformeln existieren
4) Wenn $p(x)$ lauter ganzzahlige Koeff besitzt

und ganzzahlige Nst abdividiert werden, dann bleiben alle beteiligten Zahlen ganzzahlig.

$$p_d x^d + \dots + p_0 = p(x) = (x-\alpha)\left(\ell_{d-1} x^{d-1} + \dots + \ell_0\right)$$
$$= -\alpha \ell_0 + x\,(\text{irgendetwas})$$

$\Rightarrow \quad p_0 = -\alpha \ell_0$; alle beteiligten Zahlen sind ganz

$\Rightarrow \quad \alpha$ teilt konstanten Term p_0

Also: Bei Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten sind allfällige ganzzahlige Nullstellen unter Teiler des konstanten Terms.

(zB. $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$.
Konstanter Term: 2
Teiler der konst Terms: $-2, -1, 1, 2$
nur diese kommen für Probieren in Frage)

5) Wenn $p(x)$ Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1, so besitzt $p(x)$ nur ganzzahlige oder irrationale Nullstellen, also erratbar oder hoffnungslos (nach obigem Schema)

<u>Satz von Vieta</u> Sei $x^2 + px + q = 0$ eine quadratische Gleichung mit Lösungen α_1, α_2. Dann gilt

$$x^2 + px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

$$q = \alpha_1 \alpha_2$$

$$p = -(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$\Leftarrow$ durch abdividieren

ausmult.: $x^2 - \alpha_1 x - \alpha_2 x + \alpha_1 \alpha_2$

<u>Beispiel</u>. $x^2 + 8x + 7 = 0$.

$$7 = 1 \cdot 7 = (-1)(-7)$$

$$8 = 1 + 7 = -(-1 + (-7))$$

Lösungen: (-1) und (-7)

1.4. Einschub: Komplexe Zahlen

Wir wollen auch Gleichungen lösen, die keine reellen Lsg haben, zB

$$x^2+1=0 \qquad \left(x^2=-1 \right)$$

$$x^2+2x+2=0 \qquad \left(x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} \right)$$

Definiere $i := \sqrt{-1}$

Definition.

$$\mathbb{C} = \{ a+bi \mid a,b \in \mathbb{R} \}$$ Menge der komplexen Zahlen.

$\operatorname{Re}(a+bi) := a$ „Realteil"

$\operatorname{Im}(a+bi) := b$

i ... imaginäre Einheit

Bsp. Rechnen mit komplexen Zahlen,

$$(2+3i)+(18+10i) = 20+13i$$
$$(4+7i)-(-2+3i) = 6+4i$$

$$(2+3i)(4+5i) = 8+3\cdot 4i+2\cdot 5i+3\cdot 5\underbrace{i^2}_{=-1} =$$
$$= 8-15+(12+10)\,i = -7+22i$$

Rechenregeln Seien $s, w, z \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$w+z = z+w \qquad z\cdot w = w\cdot z \qquad \text{„Kommutativgesetz"}$$
$$w+(z+s) = (w+z)+s \qquad w\cdot(z\cdot s) = (w\cdot z)\cdot s \qquad \text{„Assoziativgesetz"}$$
$$s(w+z) = sw+sz \qquad \text{„Distributivgesetz"}$$

Definition. Sei $z = a+bi$ eine komplexe Zahl, $a, b \in \mathbb{R}$.
Dann setze
$$\bar{z} = a-bi$$
„die zu z konjugiert komplexe Zahl"

(Motivation: $x^2+2x+2=0$

$$x=-1\pm\sqrt{1-2}=$$
$$=-1\pm\sqrt{-1}=$$
$$=-1\pm i$$

$$x_1=-1+i$$
$$x_2=-1-i=\overline{x_1}$$
)

Wenn $z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$,

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2\cdot(-1)=$$
$$=a^2+b^2$$

Das kann man zur Division nutzen:

$$\frac{18+10i}{2+3i}=\frac{18+10i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}=\frac{36+20i-54i-30i^2}{4+9}=$$

$$=\frac{66-34i}{13}=\frac{66}{13}-\frac{34}{13}i$$

$\underbrace{}_{\in \mathbb{R}} \quad \underbrace{}_{\in \mathbb{R}}$

Das geht gut, solange der Nenner nicht $0+0i$ ist, durch Letzteres wollen wir sowieso nicht dividieren.

Bemerkung: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$: $x \in \mathbb{R}$, schreibe es als $x + 0i$

Bsp.:

- $x^2 + 4x + 13 = 0$

$$x = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} =$$

$$= -2 \pm \sqrt{(-1)3^2} = -2 \pm 3\sqrt{-1} = -2 \pm 3i$$

- $\sqrt{-18} = \sqrt{(-1)\cdot 18} = i \cdot \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\, i \quad \in \mathbb{C}$.

Was ist mit Glg. höheren Grades? Brauchen wir schon wieder neue Zahlen?

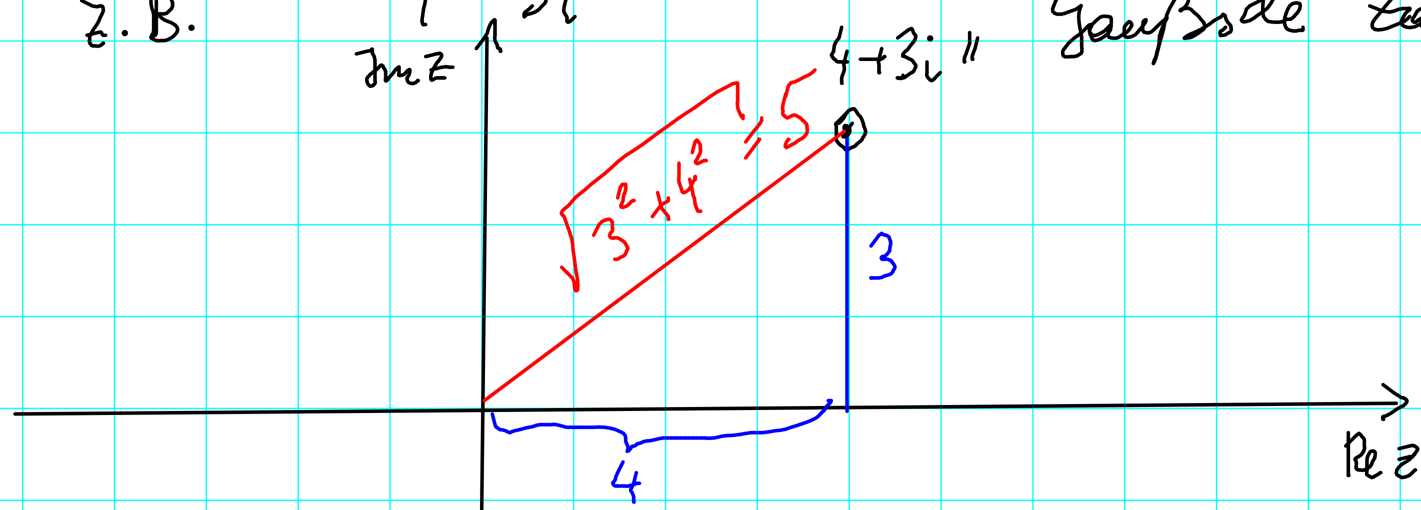
Satz (Fundamentalsatz der Algebra) Sei $p(x)$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten; $\deg p(x) > 0$. Dann besitzt $p(x)$ mindestens eine komplexe Nullstelle.
Daher gibt es für ein Polynom vom Grad d und Leitkoeffizient C genau d komplexe Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ (nicht notwendigerweise verschieden), sodass

$$p(x) = C(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_d)$$

Beweis dieses Satzes erfordert viel mehr Maschinerie, als wir haben (wollen).

Graphische Darstellung komplexer Zahlen

z.B. $4+3i$ „Gaußsche Zahlenebene".



Wir stellen die komplexe Zahl $z = a + bi$ durch das Paar (a, b) in der Ebene dar. Laut Pythagoras ist dann

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

der Abstand von z und dem Ursprung. „(Absolut) Betrag von z"

Ist das mit dem Betrag einer reellen Zahl vereinbar,

<u>Beispiel</u>, $z = -5 = -5 + 0i$

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

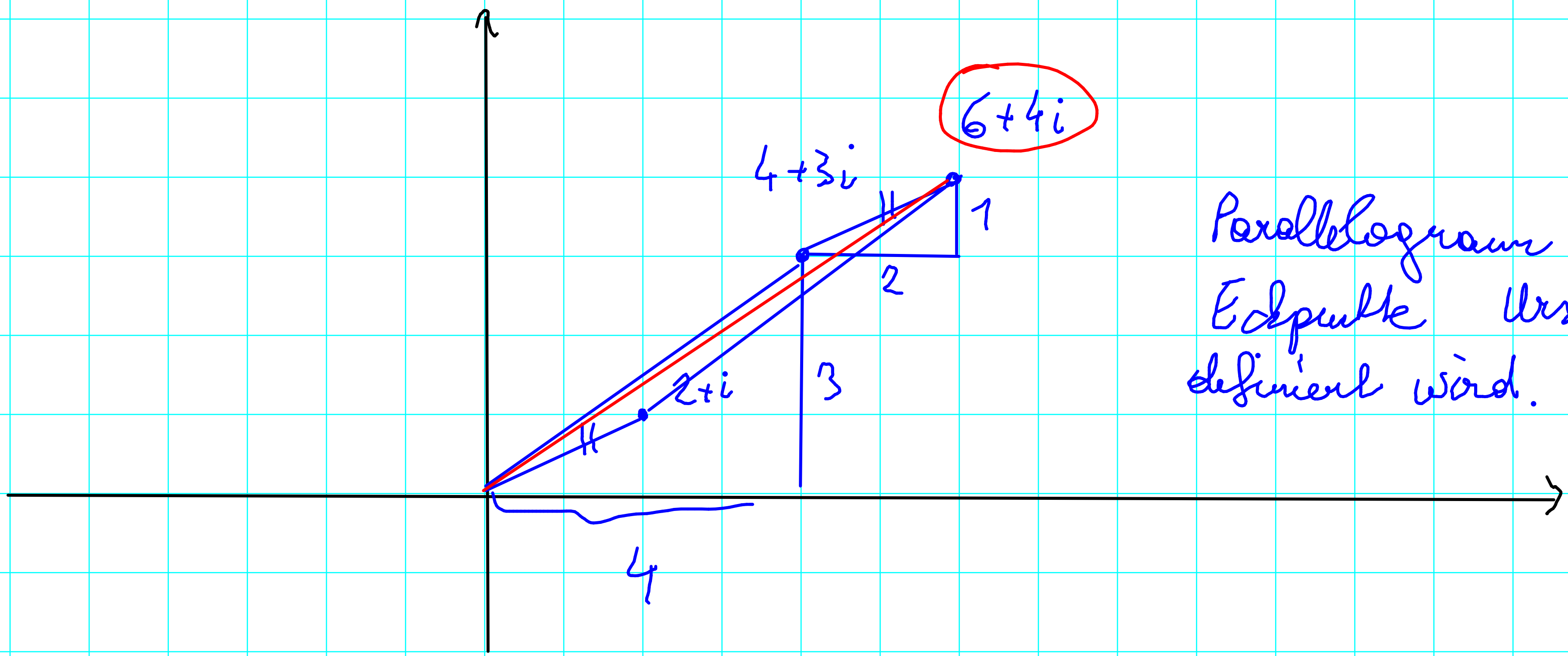
d. h., der eben eingeführte komplexe Absolutbetrag ist mit dem in den reellen Zahlen definierten Absolutbetrag kompatibel.

Addition von komplexen Zahlen in der Zahlenebene.

$z = 4 + 3i$

$w = 2 + i$

$w + z = 6 + 4i$



Parallelogramm, das durch Eckpunkte Ursprung, z, w, $z+w$ definiert wird.

1.5. Weitere Überlegungen zum Lösen von Gleichungen

Manchmal brauchen wir Fallunterscheidungen.

Beispiel. $|x+2| = |x+4|$

Fall 1. $x+2 \geq 0 \iff x \geq -2.$

Dann gilt

$$|x+2| = x+2$$

$$x+2 = |x+4|$$

Fall 1.1. $x+4 \geq 0 \iff x \geq -4$, also d.h. immer (weil $x \geq -2$).

$$|x+4| = x+4.$$

Lösen $x+2 = x+4$ $\quad L_{1,1} = \emptyset.$

Fall 1.2. $x+4 < 0$ d.h. nie (weil $x \geq -2$)

$L_{1,2} = \emptyset$

Fall 2 $\quad x+2<0 \iff x<-2.$

Dann gilt $|x+2| = -(x+2)$

Fall 2.1. $\quad x+4 \geq 0 \iff x \geq -4$, also $x \in [-4,-2)$

Dann gilt $|x+4| = x+4.$

Löse
$$-(x+2) = x+4$$
$$\iff -x-2 = x+4 \quad | +x-4$$
$$-6 = 2x$$
$$\underline{x = -3}$$

$L_{2,1} = \{-3\}$

Fall 2.2 $\quad x+4<0 \iff x<-4$, also $x \in (-\infty,-4)$

Dann gilt $|x+4| = -(x+4)$

Löse $\quad -(x+2) = -(x+4) \qquad L_{2,2} = \emptyset$

Insgesamt: $\quad L = L_{1,1} \cup L_{1,2} \cup L_{2,1} \cup L_{2,2} = \{-3\}$

$\square$

Bemerkungen 1) Man hätte von vornherein sehen können, dass sich Verhalten bei -4 und -2 ändert und die 3 Fälle

$x < -4$

$-4 \leq x < -2$

$-2 \leq x$

behandeln können. Das wäre v.a. bei mehr Beträgen effizienter.

2) $$|x+4| = |x-(-4)| = \text{Abstand von } x \text{ zu } -4$$
$$|x+2| = |x-(-2)| = \text{Abstand von } x \text{ zu } -2.$$

$$\Longrightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid |x+2| = |x+4|\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Abstand } x \text{ zu } -4 = \text{Abstand } x \text{ zu } -2\}$$

$$= \{-3\}$$ (Halbierungspunkt).

(das war sehr auf die konkrete Glg bezogen).

1.6. Ungleichungen

Definition. Eine Ungleichung besteht aus 2 Termen, die durch eines der Ungleichheitszeichen $<, \leq, \geq, >$ verbunden sind.

Beispiele jeweils $x \in \mathbb{R}$

1) $x^2 \geq 0$ gilt immer
2) $x^2 + 2x + 2 \geq 0$
3) $x^2 + 3x + 2 \geq 0$
4) $x + 17 > 42$ gilt für $x > 25$

Lösen von Ungleichungen

- Addition beliebiger Werte auf beiden Seiten
- Subtraktion —— " ——
- Multiplikation mit pos. Zahl beider Seiten;
  bei Multipl. mit neg. Zahl auf beiden Seiten dreht sich Ungleichheitszeichen um.
- Division durch pos. Zahl ✓

— " — neg. Zahl: Ungleichheitszeichen dreht sich um.

Beispiel 5.

$$-2x + 9 \geq -7 \quad \Big| -9$$
$$-2x \geq -16 \quad \Big| : (-2) < 0$$
$$x \leq 8$$
$$L = (-\infty, 8]$$

Beispiel 6.

$$\frac{x+7}{x+3} \geq 3 \quad \Big| \cdot (x+3)$$

Fall 1. $x+3>0$.
$x > -3$

$$x+7 \geq 3(x+3)$$

$-2 \geq 2x$ $\quad x \leq -1$

$L_1 = (-3, -1]$

Fall 2. $x+3<0$
$x < -3$

$$x+7 \leq 3(x+3)$$

$x \geq -1$

$L_2 = \emptyset$

Lösungsmenge: $(-3, -1]$

$\square$

19.10.2011

Bsp 7. $x^3+4x^2+5x+2 \leq 0$

wir wollen faktorisieren, also Nullstellen suchen.
Allfällige ganzzahlige Lsg sind Teiler von 2, also $-2,-1,1,2$;
positive sind zu groß;
$x=-1$ ist Lsg.

$$\left(x^3+4x^2+5x+2\right):(x+1) = x^2+3x+2$$

Weiters $x^2+3x+2 = (x+2)(x+1)$

$$\left(\text{Lösungsf. } -\frac{3}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}}}_{1/2} = -2 \text{ oder } -1\right)$$

Faktorisierung:

$$x^3+4x^2+5x+2 = (x+1)^2(x+2) \leq 0.$$

Fall 1. $(x+1)=0$ (also $x=-1$), Ugl stimmt.

$$L_1 = \{-1\}$$

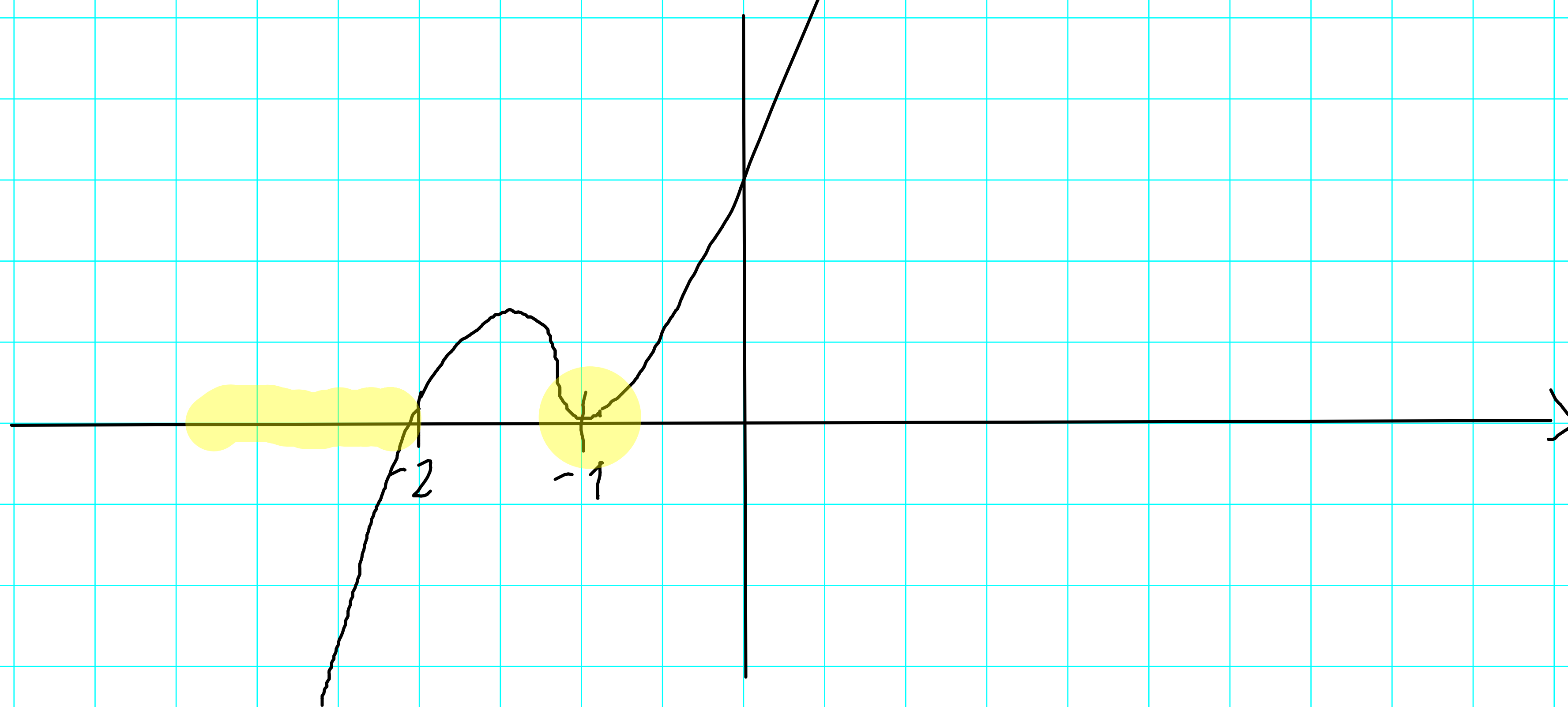
Fall 2: $x+1 \neq 0$, also $(x+1)^2 > 0$

dividiere Ugl durch **positives** $(x+1)^2$ und erhalte

$$x+2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq -2 \qquad L_2 = (-\infty, -2]$$

Lösung: $\quad L = (-\infty, -2] \cup \{-1\}$



Bsp 8. $x^4+2x^3+x^2-2x-2 \geq 0$

Allfällige ganzz. Lsg: $-2,-1,1,2$

$$(x^4+2x^3+x^2-2x-2):(x-1) = x^3+3x^2+4x+2$$

$$(x^3+3x^2+4x+2):(x+1) = x^2+2x+2$$

Lösungsformel: $-1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1}$ echt komplex.

$$x^2+2x+2 = \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{>0} > 0.$$

Vollst. Faktorisierung.

$$x^4+2x^3+x^2-2x-2 = (x-1)(x+1)(\underbrace{x^2+2x+2}_{>0}) \geq 0.$$

Dividiere durch pos. Faktor x^2+2x+2 und erhalte

$$(x-1)(x+1) \geq 0.$$

Fallunterscheidung Spannend sind $x = \pm 1$.

Fall 1. $x < -1$.

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x-1 &< 0 \\ x+1 &< 0 \end{aligned}\right\} \quad (x-1)(x+1) > 0$$

guter Fall.

Fall 2. $-1 < x < 1$

$$\left.\begin{aligned} x-1 &< 0 \\ x+1 &> 0 \end{aligned}\right\} \quad (x-1)(x+1) < 0$$

schlechter Fall

Fall 3. $1 < x$

$$\left.\begin{aligned} x-1 &> 0 \\ x+1 &> 0 \end{aligned}\right\} \quad (x-1)(x+1) > 0$$

gut

Fall 4. $x = \pm 1$: $(x-1)(x+1) = 0$

gut.

Lösung $L = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

oder $L = \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$

$\leq, >, <$

<u>Allgemeine Vorgangsweise</u> für polynomielle Ugl $\quad p(x) \geq 0$

1) Faktorisiere $p(x)$ durch Nullstellensuche und Abdividieren;
2) Konjugiert kompl. Nullstellen als quadr. Polynom belassen; dieses ist immer positiv oder immer negativ; herausdividieren (ggf. Ungleichheitszeichen umdrehen)
3) Je Abschnitt zwischen Nullstellen bzw. $(-\infty, $ kl. Nst$)$ bzw. (gr. Nullst, ∞) Vorzeichen der Faktoren bestimmen und damit Vorzeichen des Produkts
4) Nst von $p(x)$ sind immer (falls $\geq$ oder $\leq$) oder nie (falls $>$ oder $<$) Lösungen.

1.7. Wichtige Identitäten

<u>Satz (Binomischer Lehrsatz)</u>

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad , \text{wobei } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

(vgl. Math 0)

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

<u>Faktorisierung von $a^n - b^n$</u> für $n \geq 2$.

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

(Multipliziere rechts aus:

$$
\begin{aligned}
& a^n + \cancel{a^{n-1}b} + \cancel{a^{n-2}b^2} + \cancel{\dots} + \cancel{a^3b^{n-3}} + \cancel{a^2b^{n-2}} + \cancel{ab^{n-1}} \\
-\big(& \cancel{a^{n-1}b} + \cancel{a^{n-2}b^2} + \cancel{a^{n-3}b^3} + \cancel{\dots} + \cancel{a^2b^{n-2}} + \cancel{ab^{n-1}} + b^n\big) \\
= \ & a^n - b^n
\end{aligned}
$$
)

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$
$$\vdots$$

Wenn n ungerade, gibt es auch ähnliche Formel für $a^n + b^n$
Setze für b den Wert $-b$ ein; zB. $n=5$

$$a^5 + b^5 = a^5 - (-b)^5 = (a-(-b))(a^4 + a^3(-b) + a^2(-b)^2 + a(-b)^3 + (-b)^4)$$
$$= (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4).$$

Bei geraden n führt das auf neue Faktorisierung von $a^n - b^n$,
zB $n=4$:

$$a^4 - b^4 = a^4 - (-b)^4 = (a-(-b))(a^3 + a^2(-b) + a(-b)^2 + (-b)^3)$$
$$= (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

aber für $n=4$ geht's sowieso besser:

$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$$