(19.10.2011)

Kapitel 2: Funktionen

2.1. Grundlegendes

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem Element aus Definitionsmenge (domain) genau einen Wert in eine Wertemenge (codomain) zuordnet.

Schreibweise:
$$f: D \longrightarrow W$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Beispiele. 1.
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$
ist eine Funktion.

$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(2) = 4$
$\vdots$

$f(-1) = 1$
$f(-2) = 4$
$\vdots$

$f(\sqrt{2}) = 2$
$\vdots$

2)

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

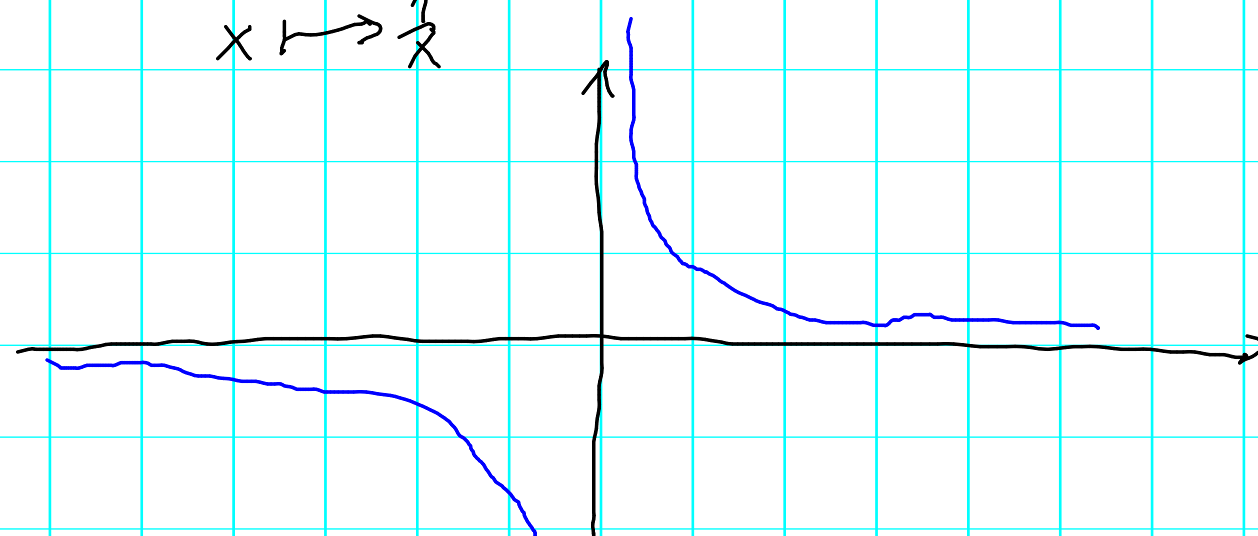
ist <u>keine</u> Funktion.

(kein Funktionswert für $x = 0$)

aber

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

<u>ist eine</u> Funktion



3) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \pm\sqrt{x}$

keine Funktion: für neg. x kein Funktionswert (in angeg. Wertemenge $\mathbb{R}$)
für pos x zwei Funktionswerte

zB

$\tilde{h}: [0,\infty) \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -\sqrt{x}$

ist eine Funktion.

Visualisierung von Funktionen durch Graphen

$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$ (vgl. obige Skizzen)

<u>Darstellung von Funktionen</u>

- explizite Darstellung (siehe oben)
- implizite Darstellung (aus Gleichung).

Bsp 4.

$$p \cdot V = R \cdot T$$

(Gasgleichung für ideales Gas

p ... Druck
V ... Volumen
T ... Temperatur
$R = 8.314472 \ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
(Gaskonstante))

Kann z.B. p als Funktion von V und T schreiben:

$$p(V,T) = \frac{R \cdot T}{V}$$

$p: (\mathbb{R}^+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$, wobei $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

Bem.: Man muss natürlich aufpassen, dass wirklich eine eind. Funktion herauskommt, z.B.

$$y^2 - x = 0$$

$$\left(\Longleftrightarrow \quad y^2 = x \quad \Longleftrightarrow \quad y = \pm \sqrt{x} \quad \text{---} \right).$$

??

– tabellarische Darstellung.

Bsp 5. $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N}$

x	$f(x)$
1	1
2	2
3	3
4	5

oder

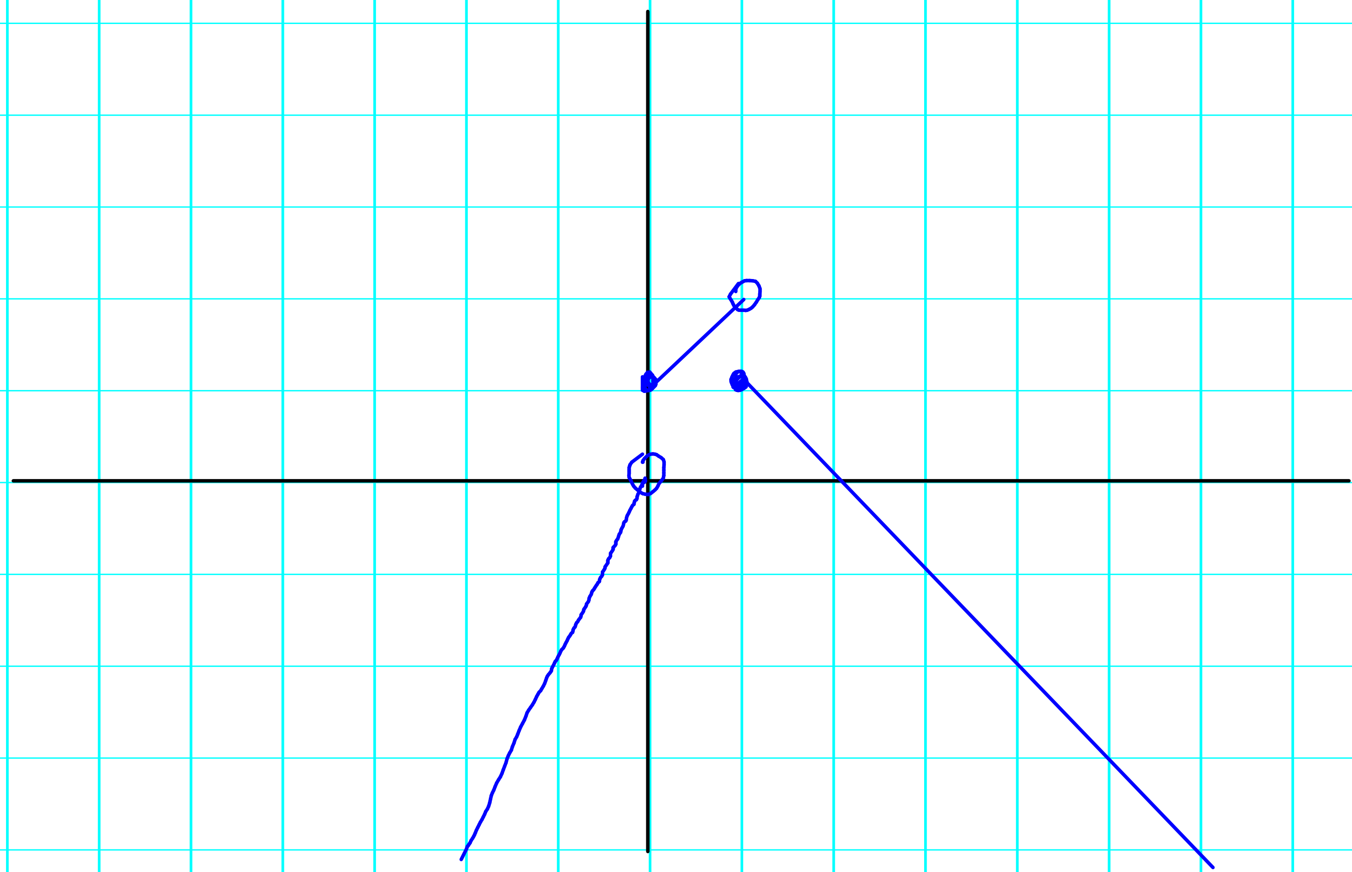
x	$f(x)$
1	0
2	9
3	2
4	2

Bei Funktionen von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odgl macht das streng genommen wenig Sinn;

- <u>stückweise definierte Funktionen</u>

Bsp 6 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{falls } x < 0 \\ x+1, & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 2-x, & \text{falls } 1 \leq x \end{cases}$$



<u>Bsp 7</u> (Absolutbetrag in $\mathbb{R}$)

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

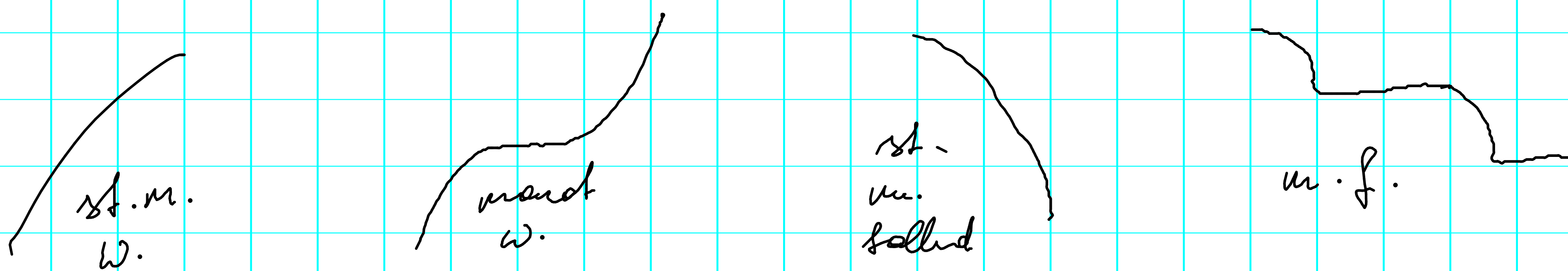
Definition: Sei $f: D \to \mathbb{R}$ für ein passendes D.
Ein $x \in D$ heißt Nullstelle von f, wenn $f(x) = 0$ gilt.

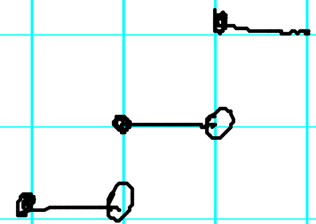
2.2. Eigenschaften von Funktionen

2.2.1. Monotonie

Definition Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt

1) streng monoton wachsend, wenn für alle $x < y$ gilt, dass $f(x) < f(y)$.
2) monoton wachsend, wenn für alle $x < y$ gilt, dass $f(x) \leq f(y)$,
3) streng monoton fallend, wenn für alle $x < y$ gilt, dass $f(x) > f(y)$
4) monoton fallend, wenn für alle $x < y$ gilt, dass $f(x) \geq f(y)$





m.w.

global: keines der 4

lokal: zuerst st m f; dann st. m. w.

Bei hübschen Funktionen kann man das Nachrechnen

<u>Bsp.</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^3.$

Sei $x < y$. Behauptung: $f(x) < f(y)$.

Betrachte

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2) =$$

$$= (y-x)\left(y^2 + 2\frac{x}{2}y + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{4}x^2\right) =$$

$$= \underbrace{(y-x)}_{>0}\left(\underbrace{\left(y+\frac{x}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4}x^2}_{\geq 0}\right)$$

> 0, außer $x = 0$ und
$y + \frac{x}{2} = 0$, also $x = y = 0$,
das war nicht ausgemacht

$$\Longrightarrow \quad f(y) - f(x) = y^3 - x^3 > 0 \quad \Longrightarrow \quad f(y) > f(x).$$

Bemerkung. Mit Differentialrechnung geht's leichter (siehe Kap 3),

2.2.2. Beschränktheit

Definition Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn es eine positive Konstante C gibt, sodass

$$|f(x)| \leq C \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt.

Beispiel. $f(x) = \cos x$ $\qquad |\cos x| \leq 1$ beschränkt durch 1

$g(x) = \sin x$ $\qquad |\sin x| \leq 42$ (das ist nicht bestmöglich, aber trotzdem wahr)

beschränkt

$h(x) = x^2$ nicht beschränkt.

(wäre „nach unten beschränkt", aber ist nicht beschr. im Sinne der Def.)

25.10.2011

Definition. Sei $f: D \to \mathbb{R}$. Dann heißt

1) f nach unten beschränkt, wenn es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x \in D$

$$C \leq f(x)$$

gilt;

2) f nach oben beschränkt, wenn es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt sodass für alle $x \in D$

$$f(x) \leq M$$

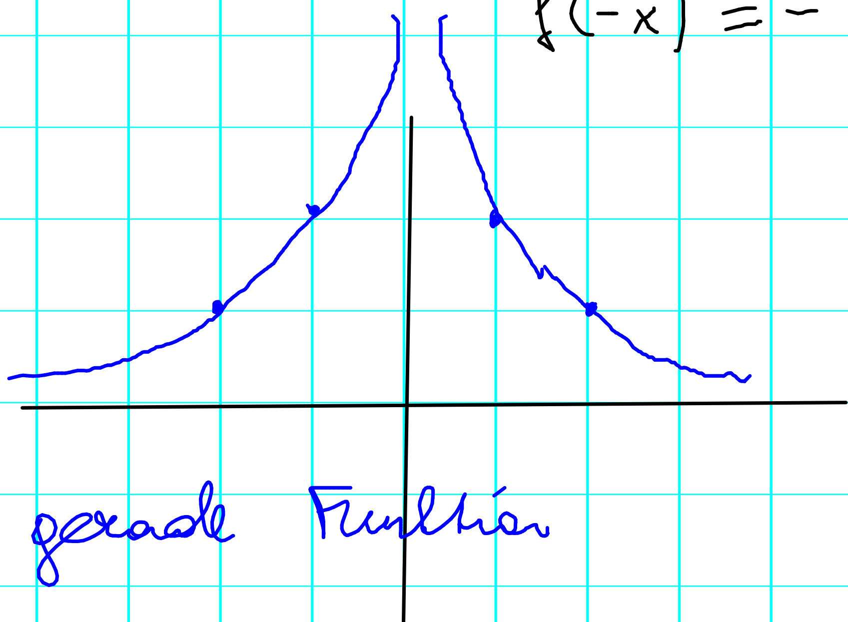
gilt

Bemerkung f beschränkt $\Leftrightarrow$ f nach unten und f nach oben beschränkt.

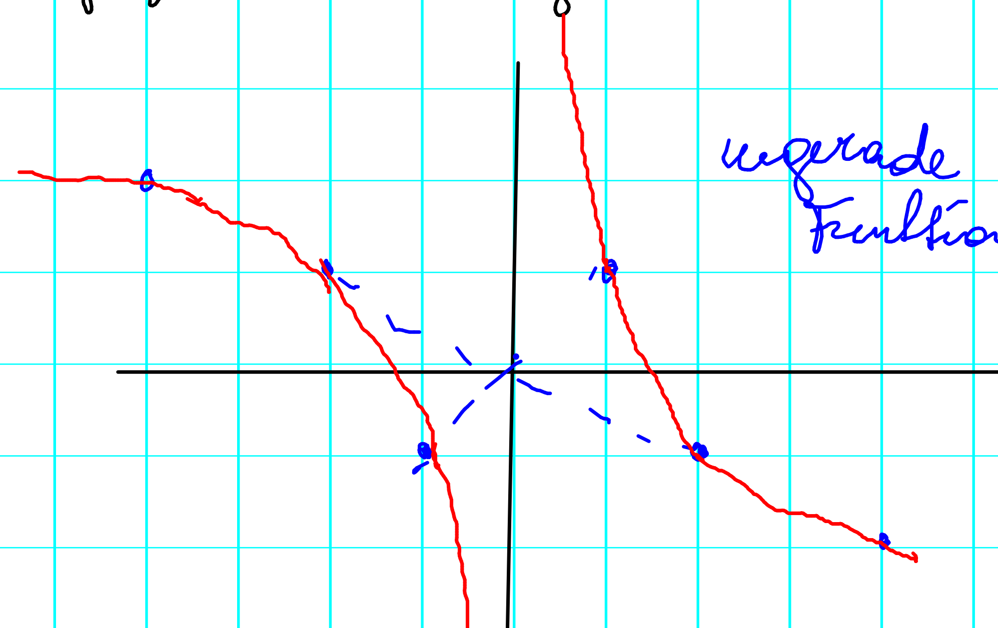
2.2.3. Symmetrie

Definition Sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt f

1) gerade Funktion (symmetrisch zur y-Achse), wenn $f(-x) = f(x)$ ist. (für alle $x \in D$).
2) ungerade Funktion (punktsymmetrisch zum Ursprung), wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.



gerade Funktion



ungerade Funktion

Beispiele.

$f(x) = x^2$ gerade

$f(x) = x$ ungerade

$f(x) = 2011$ gerade

$f(x) = 0$ gerade und ungerade (!)

$f(x) = \cos x$ gerade

$f(x) = \sin x$ ungerade

$f(x) = x^2 + x$ weder gerade noch ungerade. $f(1) = 2$, $f(-1) = 0$

2.2.4. Periodizität

Definition. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt L-periodisch (für ein $L > 0$), wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

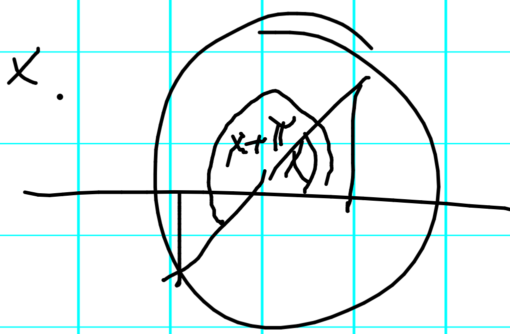
$$f(x+L) = f(x)$$

Beispiele. sin und cos sind 2π-periodisch.

(sin und cos sind auch 4π periodisch oder 42π periodisch)

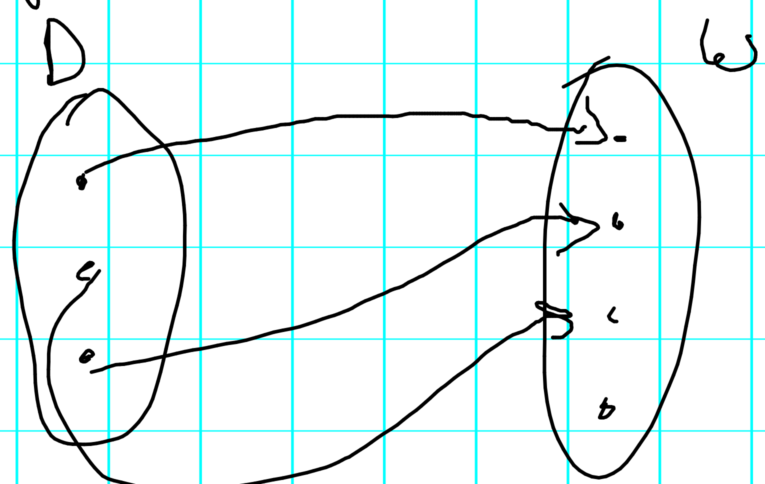
Behauptung: tan ist π-periodisch:

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$$

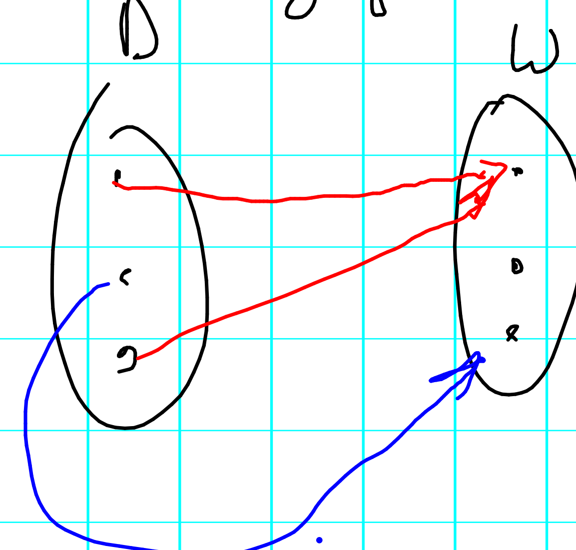


2.2.5 Injektive, Surjektive und Bijektive Funktionen

Definition. Eine Funktion $f: D \to W$ heißt injektiv, wenn es für jedes $y \in W$ höchstens ein x mit $f(x) = y$ gibt.



injektiv



nicht injektiv.

<u>Beispiele</u>

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = x^2$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} f(+2) = 4 \\ f(-2) = 4 \end{matrix}\right\}$

nicht injektiv

2) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}; \quad f(x) = x^2$

injektiv (da Problemfälle aus Defmenge disqualifiziert)

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = 2011$

nicht injektiv $\quad$ z.B. $f(3745) = 2011 = f(42)$

4) $f: \{2014\} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = 2011$

ist injektiv (aber das war etwas drastisch)

5) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x + 5}{x + 2}$

Sei $y \in \mathbb{R}$. Wir suchen alle x mit $f(x) = y$.

also $$\frac{x+5}{x+2} = y \quad \Big| \cdot (x+2) \neq 0$$

$$x+5 = yx + 2y \quad \Big| -yx - 5$$

$$x - yx = 2y - 5$$

$$x(1-y) = 2y - 5 \quad \Big| : (1-y)$$

$$x = \frac{2y-5}{1-y} \quad \text{falls } y \neq 1.$$

Was ist bei $y = 1$?

$$x(1-1) = 2\cdot 1 - 5$$

$$0 = -3 \quad \text{falsche Aussage.}$$

also: für $y = 1$: kein x mit $f(x) = y$

$y \neq 1$: genau ein x mit $f(x) = y$, nämlich $x = \frac{2y-5}{1-y}$.

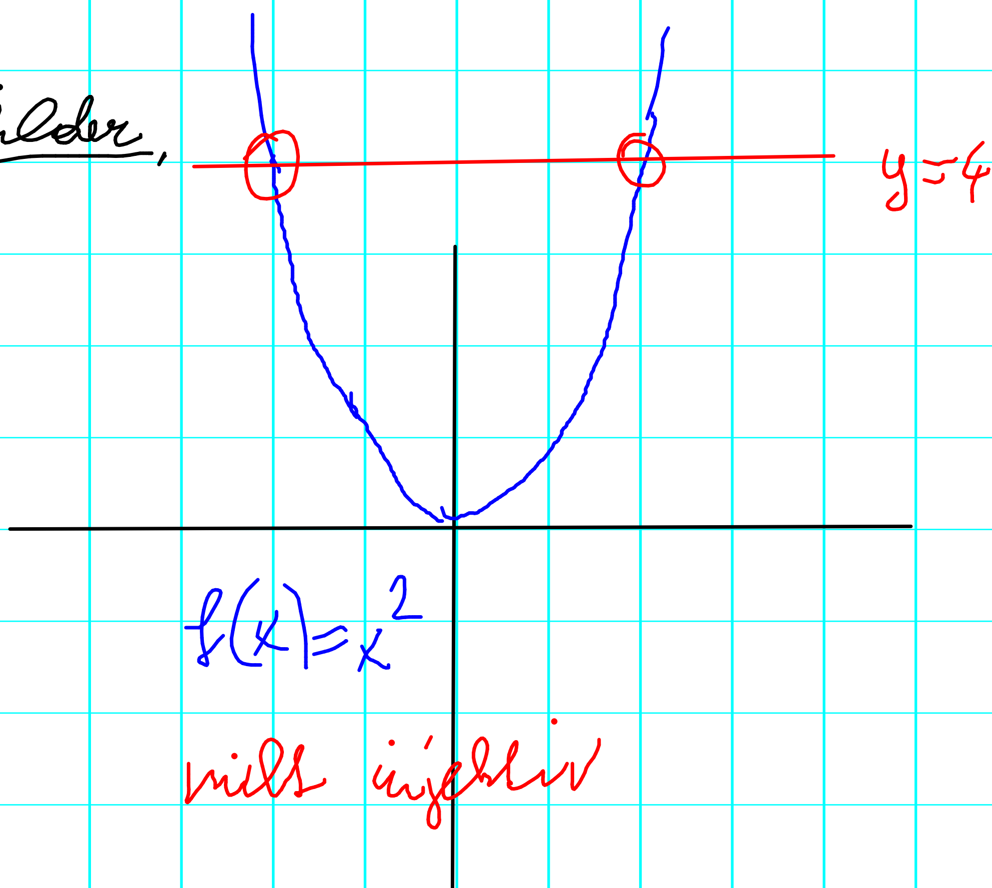
(wir müssen nur sicherstellen, dass $\frac{2y-5}{1-y} \neq -2$ ist

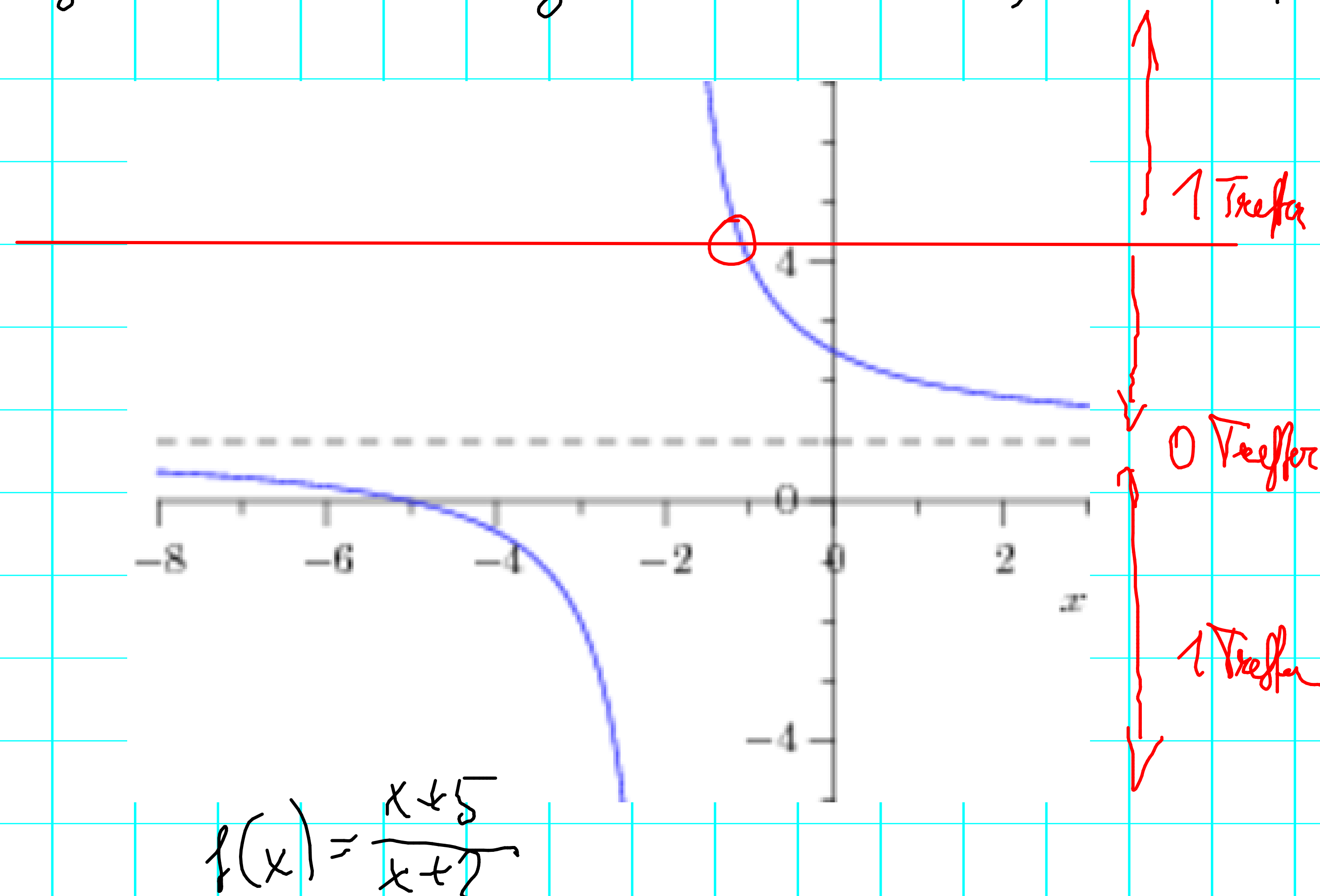
Wann gilt $\quad \frac{2y-5}{1-y} = -2 \quad \Big| \cdot (1-y) \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2y-5 = -2(1-y)$

$\Leftrightarrow \quad 2y-5 = -2+2y \Leftrightarrow -5=-2$, kein Fall).

Bilder,





Definition Eine Funktion $f: D \to W$ heißt surjektiv, wenn es für alle $y \in W$ mindestens ein $x \in D$ mit $f(x) = y$ gibt.

Beispiele

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ z.B. $y = -2$ wird von keinem $x \in \mathbb{R}$ getroffen (nicht surjektiv)

2) $f: \mathbb{R} \to [0, \infty)$ $f(x) = x^2$ ist surjektiv.

3) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{x+5}{x+2}$

nicht surjektiv, weil es kein $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ gibt, sodass $f(x) = 1$ gilt (obige Rechnung!)

4) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = \frac{x+5}{x+2}$ ist surjektiv

Definition. Eine Funktion $f: D \to W$, die injektiv und surjektiv ist, heißt bijektiv; d.h. für jedes $y \in W$ gibt es genau ein x mit $f(x) = y$.

Beispiele.

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$ bijektiv

2) $f: \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}\setminus\{1\}$; $f(x) = \frac{x+5}{x+2}$ ist bijektiv

3) $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$; $f(x) = x^2$ ist bijektiv.

4) $f: [-1,\infty) \to [10,\infty)$ $f(x) = x^2 + 2x + 11$

Sei $y \in [10,\infty)$. Ges: alle x mit $f(x) = y$, also

$$x^2 + 2x + 11 = y \quad \Big| -y$$
$$x^2 + 2x + 11 - y = 0$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - (11-y)} =$$

$$= -1 \pm \sqrt{\underbrace{y-10}_{\geq 0,\ \text{weil } y \in [10,\infty)}}$$

Weil Defbereich $=[-1,\infty)$, führt das Vorzeichen „$-$" aus Def.bereich heraus und das Vorzeichen „$+$" immer in den Defbereich, also

$$x = -1 + \sqrt{y-10}$$

genau ein x aus Defbereich für jedes y aus Wertbereich erhalten.
also bijektiv.

Bemerkung $f(x) = x^2 + 2x + 11 = \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + 10$ und ab hier direkte Arg.

Definition. Sei $f: D \to W$ eine bijektive Funktion.
Dann definiere die Umkehrfunktion $f^{-1}: W \to D$, indem für $y \in W$ $f^{-1}(y) = x$ für jenes eindeutige $x \in D$ mit $f(x) = y$.

Beispiele 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$ $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

2) $f: \mathbb{R}\setminus\{-2\} \to \mathbb{R}\setminus\{+1\};\ f(x) = \frac{x+5}{x+2}$ $\quad f^{-1}(y) = \frac{2y-5}{1-y}$

(siehe oben).

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad f(x) = x^2$ $\quad$ keine Umkehrfkt (nicht bijektiv)

4) $f: [0,\infty) \to [0,\infty);\quad f(x) = x^2$ $\quad f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

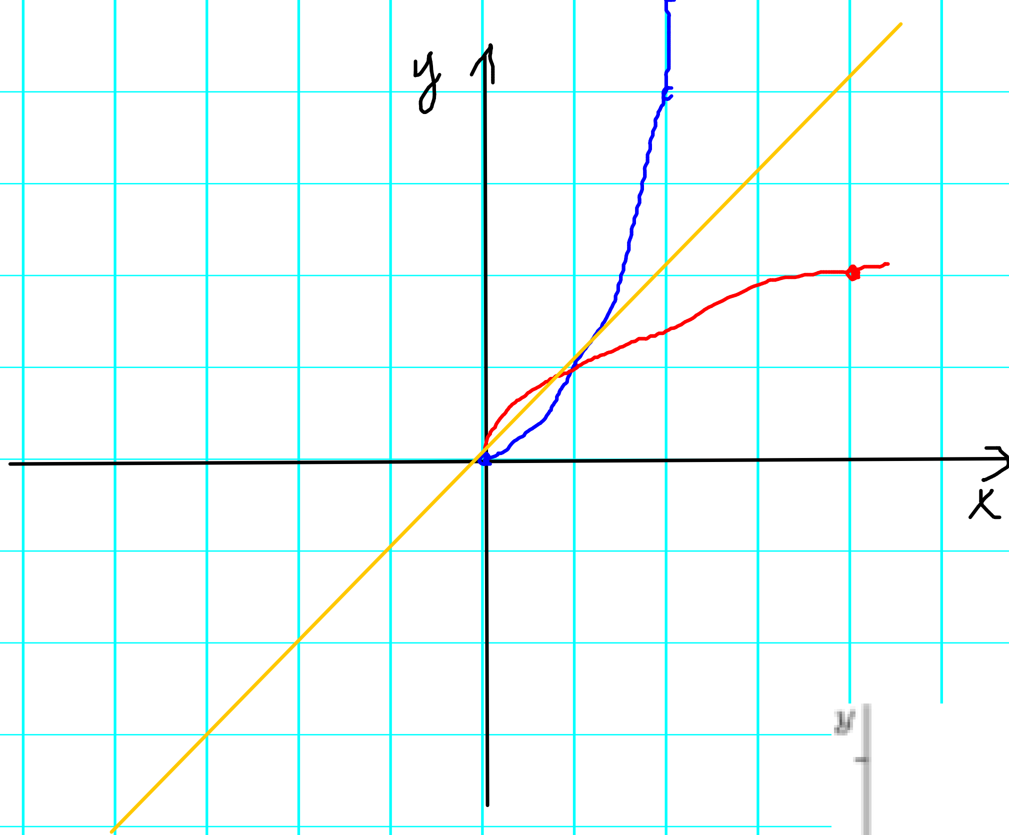
5) $f: [-1,\infty) \to [10,\infty)\quad f(x) = x^2 + 2x + 11$

$$f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{y-10}$$

$$f^{-1}(z) = -1 + \sqrt{z-10}$$

$$f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-10}$$

Geometrische Interpretation



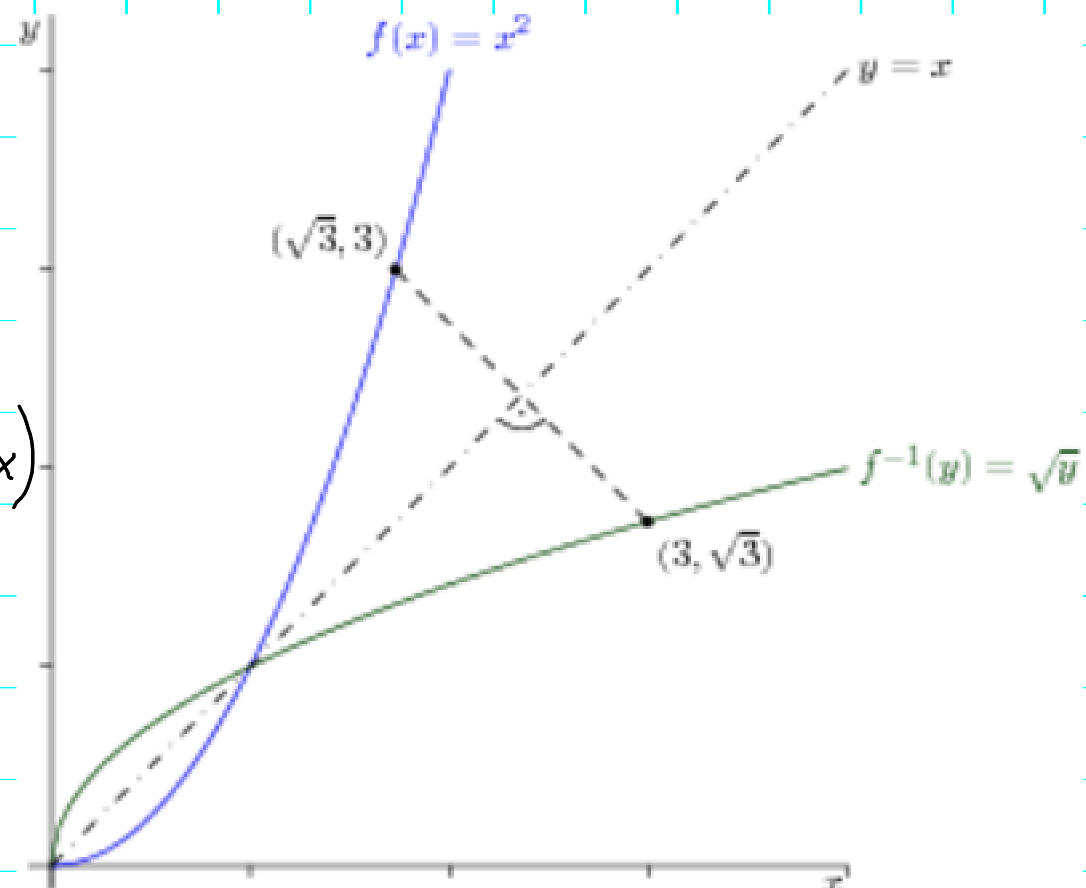
$\{(x,y) \mid y = f(x)\}$

$\|$

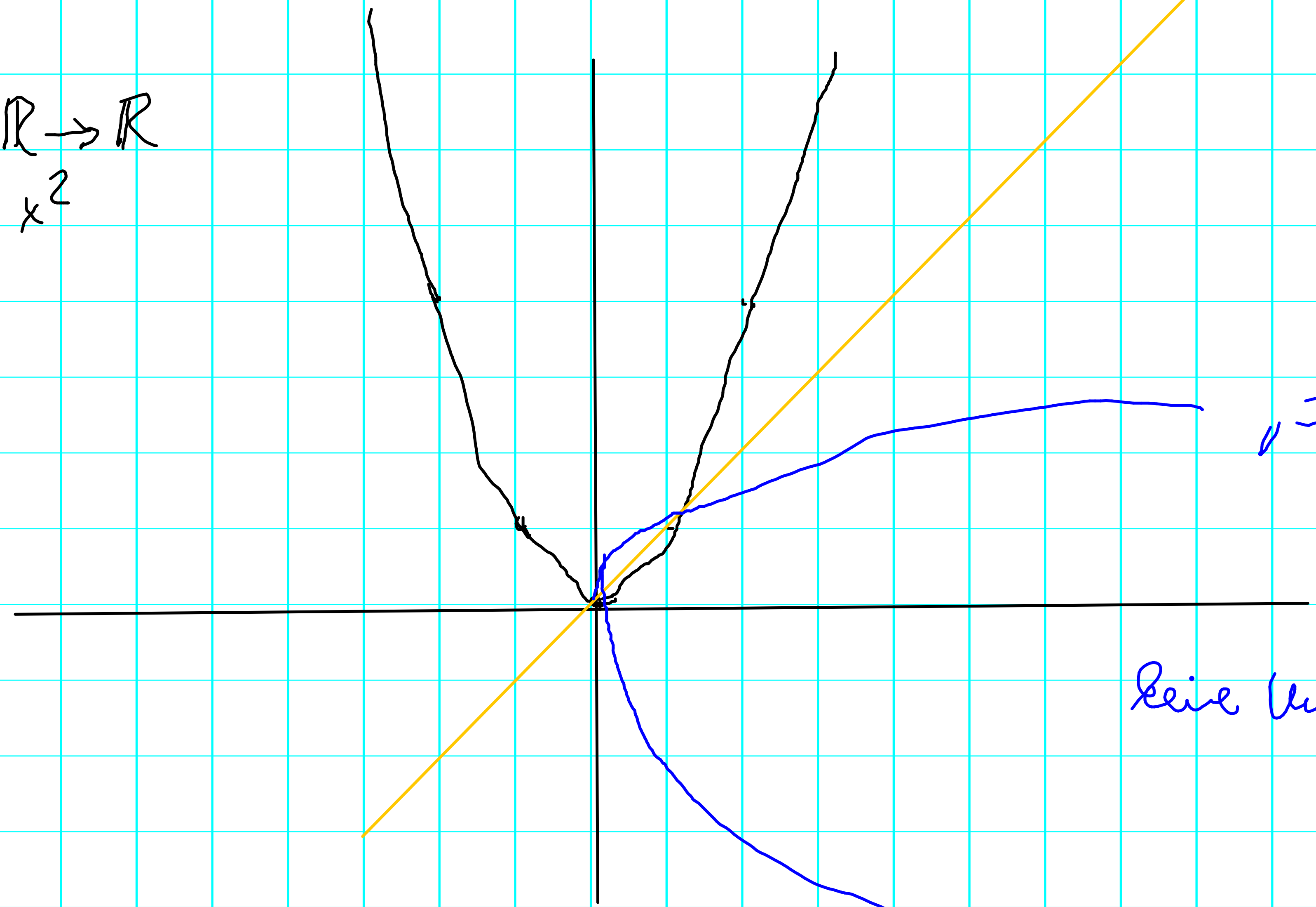
$\{(x,y) \mid x = f^{-1}(y)\}$

$\{(x,y) \mid y = f^{-1}(x)\}$

Bilden der Umkehrabbildung entspricht Spiegelung an 1. Mediane (Gerade $y=x$)



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2$

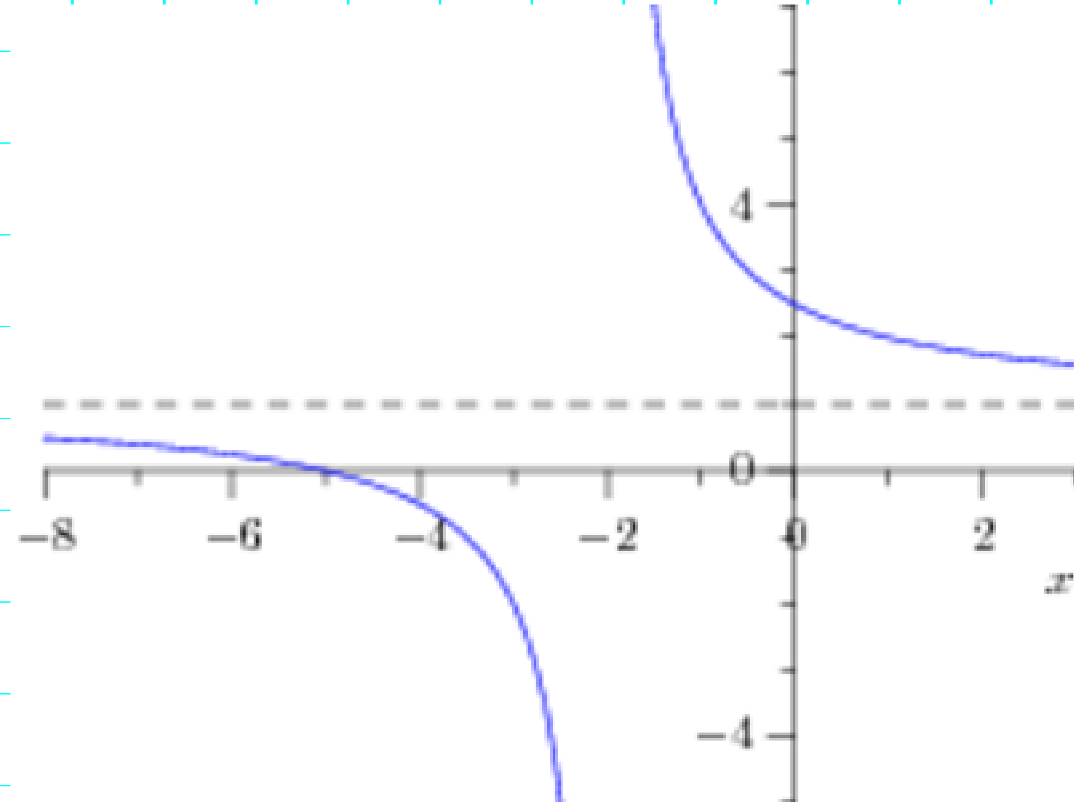


„$\pm\sqrt{x}$" für $x \geq 0$"
keine Funktion

keine Umkehrfunktion

2.3. Grenzwerte und Stetigkeit

Wir möchten formalisieren, was es heißt, dass sich eine Funktion für (z.B) x gegen a einem y-Wert annähert.



Definition: Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dann heißt f für x gegen $+\infty$ konvergent gegen ein $a \in \mathbb{R}$, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$ gibt, sodass für alle $x > \cancel{K}\, M$ gilt: $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Wir schreiben: $$\lim_{x \to \infty} f(x) = a.$$

Wenn es kein solches a gibt, heißt f divergent für $x \to +\infty$.

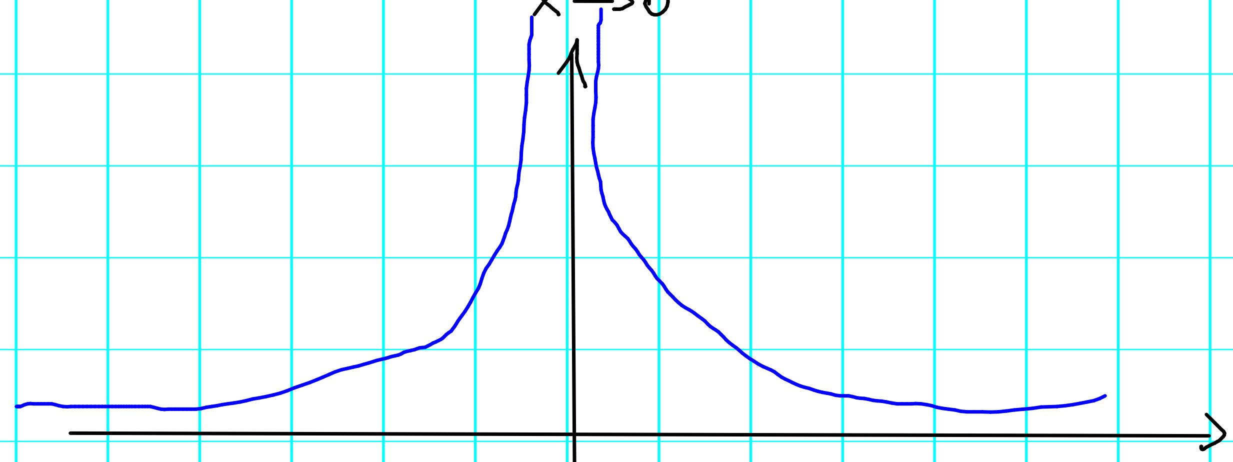
Andere Situation: $$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Was passiert, wenn $x \to 0$?

__Definition:__ Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt f konvergent gegen y_0 für x gegen x_0, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Wir schreiben $$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$
Wenn es kein solches y_0 gibt, so heißt $f(x)$ divergent in x_0

2.11.2011

Bsp. Wir wollen auch $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ definieren:



$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Definition. Sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt f bestimmt divergent gegen $+\infty$ für x gegen x_0, wenn es für jedes $M > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $f(x) > M$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$; wir schreiben

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$

Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$ $\quad \lim f(x) \stackrel{!}{=} +\infty$

$x \to \infty$

Definition. Sei $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt f bestimmt divergent gegen $+\infty$ für x gegen ∞, wenn es für jedes $M > 0$ ein $L > 0$ gibt, sodass $f(x) > M$ (und $x \in D$) für alle $x > L$; wir schreiben

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$

zum Bsp: $f(x) = x^2$.

$M = 100$ ... $L = 10$ tut Gewünschtes (für $x > 10$ gilt $f(x) > 100$)

$M = 10000$ ... $L = 100$

$M > 0$ $L = \sqrt{M}$

Tatsächlich gilt $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

Beispiel 4. $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \to \infty$

Wir suchen für alle $\varepsilon > 0$ ein $M > 0$, sodass $|f(x) - 0| < \varepsilon$ für $x > M$ gilt.

$\varepsilon = \frac{1}{10}$ $\qquad$ $M = 10$ $\qquad$ $\left(\underbrace{\left|\frac{1}{x}\right|}_{= 1/x} < \frac{1}{10} \iff 10 < x \right).$

$\varepsilon = \frac{1}{100}$ $\qquad$ $M = 100$

$\varepsilon > 0$ $\qquad$ $M = \frac{1}{\varepsilon}$

D.h. es gilt tatsächlich $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

Mit den folgenden „Grenzwertsätzen" wird das Bestimmen von Grenzwerten erleichtert:

<u>Satz</u>. Seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ für ein $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und es gelte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

für passende a und $b \in \mathbb{R}$.

Dann gilt:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \pm g(x) \right) = a \pm b$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = a \cdot b$

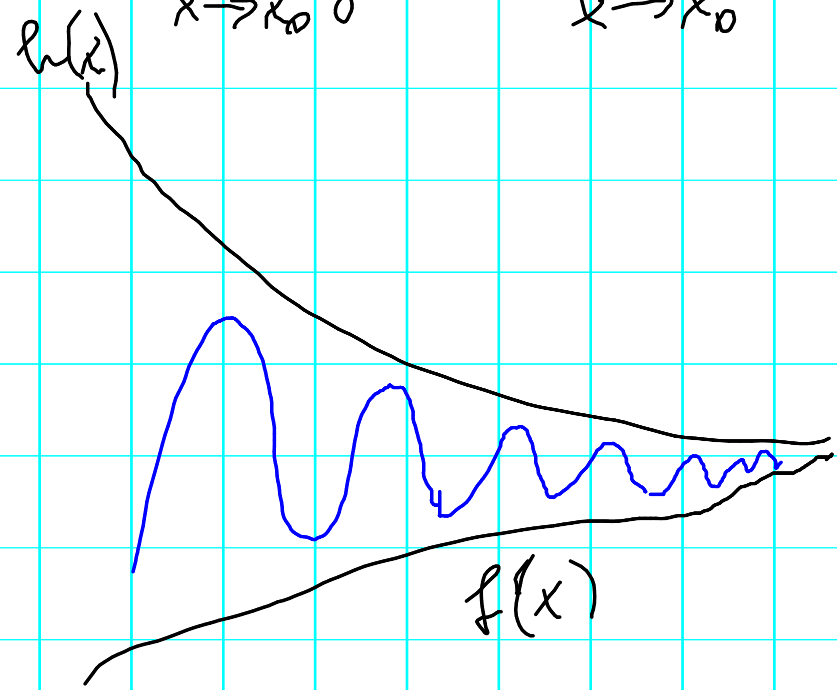
3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, falls $b \neq 0$.

4) „Einzwickersatz / Sandwich-Theorem": Wenn $h: D \to \mathbb{R}$ und

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

für alle $x \in D$ und $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$, so gilt auch

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x)$$



5) Wenn $h: D \to \mathbb{R}$ beschränkt ist und $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot h(x) = 0.$$

Bemerkung: 5) folgt aus 4): $-M \le h(x) \le M$

$$\underbrace{-M\,|f(x)|}_{\to 0} \le f(x) \cdot h(x) \le \underbrace{M \cdot |f(x)|}_{\to 0}$$

$$\overset{4)}{\Longrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x)\,h(x) = 0.$$

Beispiel 5.

$$\lim_{x \to \infty} \left(17 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{42}{x^3} \right) \overset{1)}{=} \overbrace{\lim_{x \to \infty} 17}^{=17} + \overbrace{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}}^{=0 \text{ lt. Bsp 4}} + \lim_{x \to \infty} \overbrace{\frac{5}{x^2}}^{5 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} +$$

$$+ \lim_{x \to \infty} \frac{42}{x^3} =$$

$$= 17 + 0 + \underbrace{\left(\lim_{x \to \infty} 5 \right)}_{5} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \right)}_{0} \cdot \underbrace{\left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \right)}_{0} +$$

$$+\underbrace{\left(\lim_{x\to\infty} 42\right)}_{42}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)}_{0}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)}_{0}\cdot\underbrace{\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)}_{0} =$$

$$= 17 + 0 + 5\cdot 0\cdot 0 + 42\cdot 0\cdot 0\cdot 0 = 17.$$

Wir hätten auch

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} \quad \text{versuchen können, als} \quad \frac{\lim_{x\to\infty} 5}{\lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} x} \quad \text{zu schreiben,}$$

aber der Grenzwertsatz hätte das nicht erlaubt, weil $\lim_{x\to\infty} x = +\infty$

<u>Satz</u> Seien $f: D\to\mathbb{R}$, $g: D\to\mathbb{R}$ zwei Funktionen für $D\subseteq\mathbb{R}$, weiters gelte für ein $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$

1) Wenn $\lim_{x\to x_0} g(x)$ existiert und endlich ist, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$$ „$+\infty$ + (was endliches) = $+\infty$"

2) Wenn $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existiert und positiv ist, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$$ „$+\infty$ · (was positives) = $+\infty$"

3)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$ „$\frac{1}{\infty} = 0$"

4) Wenn $g(x) > 0$ für alle $x \in D$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, so gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = +\infty$$ „$\frac{1}{+0} = +\infty$"

<u>Bemerkung</u> Wir haben keine Regeln für

$\infty - \infty$

$0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ $\qquad \frac{\nabla}{0}$

Beispiele

6.) $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+11}{20x+11} = \left(= \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Finger weg} \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{(2x+11) \cdot \frac{1}{x}}{(20x+11) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \overbrace{\frac{11}{x}}^{\to 0}}{20 + \underbrace{\frac{11}{x}}_{\to 0}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \frac{11}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty} 20 + \frac{11}{x}} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

7) $$\lim_{x \to 0} \frac{2x + 11x^2}{20x + 11x^2} = \left(= \frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x + 11x^2}{20x + 11x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{2 + \overbrace{11x}^{\to 0}}{20 + \underbrace{11x}_{\to 0}} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

8)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x^2+17}{3x^3+4x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x^2+17}{3x^3+4x+5} \cdot \frac{1/x^3}{1/x^3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{17}{x^3}}_{\to 0}}{3+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{5}{x^3}}_{\to 0}} = \frac{2}{3}$$

9)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+17x^5}{2x^2+3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x+17x^5}{2x^2+3x^3} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+17x^4}{\underbrace{2x+3x^2}_{\underbrace{2x}_{\to\pm 0}\underbrace{\left(1+\frac{3}{2}x\right)}_{\to 1}}} = \text{"}\frac{1}{\pm 0}\text{"}$$

nicht konvergent.

Definition (rechts/linksseitiger Grenzwert) Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, wir schreiben

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a,$$

wenn für alle $x > x_0$ die Vor. von $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ gelten

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a,$$

wenn für alle $x < x_0$ - - - -

Beispiele 10).

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \left(\frac{1}{+0} \right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

9)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x + 17x^5}{2x^2 + 3x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{1 + \overbrace{17x^4}^{\to 0}}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{+0}\underbrace{(2 + 3x)}_{\to 2}} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+17x^5}{2x^2+3x^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+17x^4}{x(2+3x)} = -\infty .$$

11)
$$\lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{\sqrt{2x^2+11x+9}}_{\to+\infty} - \underbrace{\sqrt{2x^2+x+1}}_{\to\infty} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{2x^2+11x+9} - \sqrt{2x^2+x+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{2x^2+11x+9} + \sqrt{2x^2+x+1}}{\sqrt{2x^2+11x+9} + \sqrt{2x^2+x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+11x+9) - (2x^2+x+1)}{\sqrt{2x^2+11x+9} + \sqrt{2x^2+x+1}} =$$

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{10x+8}{\sqrt{2x^2+11x+9} + \sqrt{2x^2+x+1}} = \quad \left(= \frac{\infty}{\infty+\infty} = \frac{\infty}{\infty} \right)$$

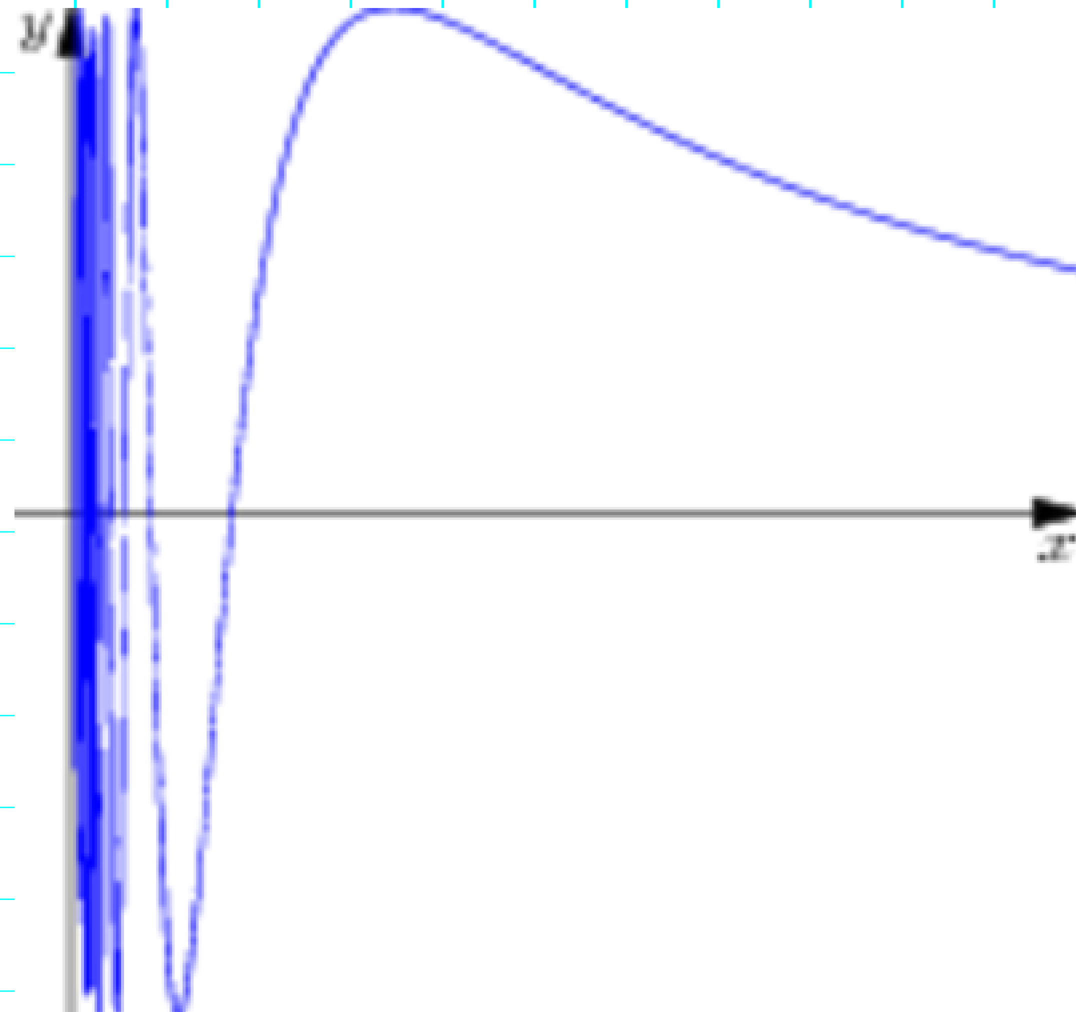
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{10x+8}{\sqrt{2x^2+11x+9} + \sqrt{2x^2+x+1}} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{10 + \frac{8}{x}}{\sqrt{2 + \frac{11}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} \to \frac{10}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

12)

$$\lim_{x \to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

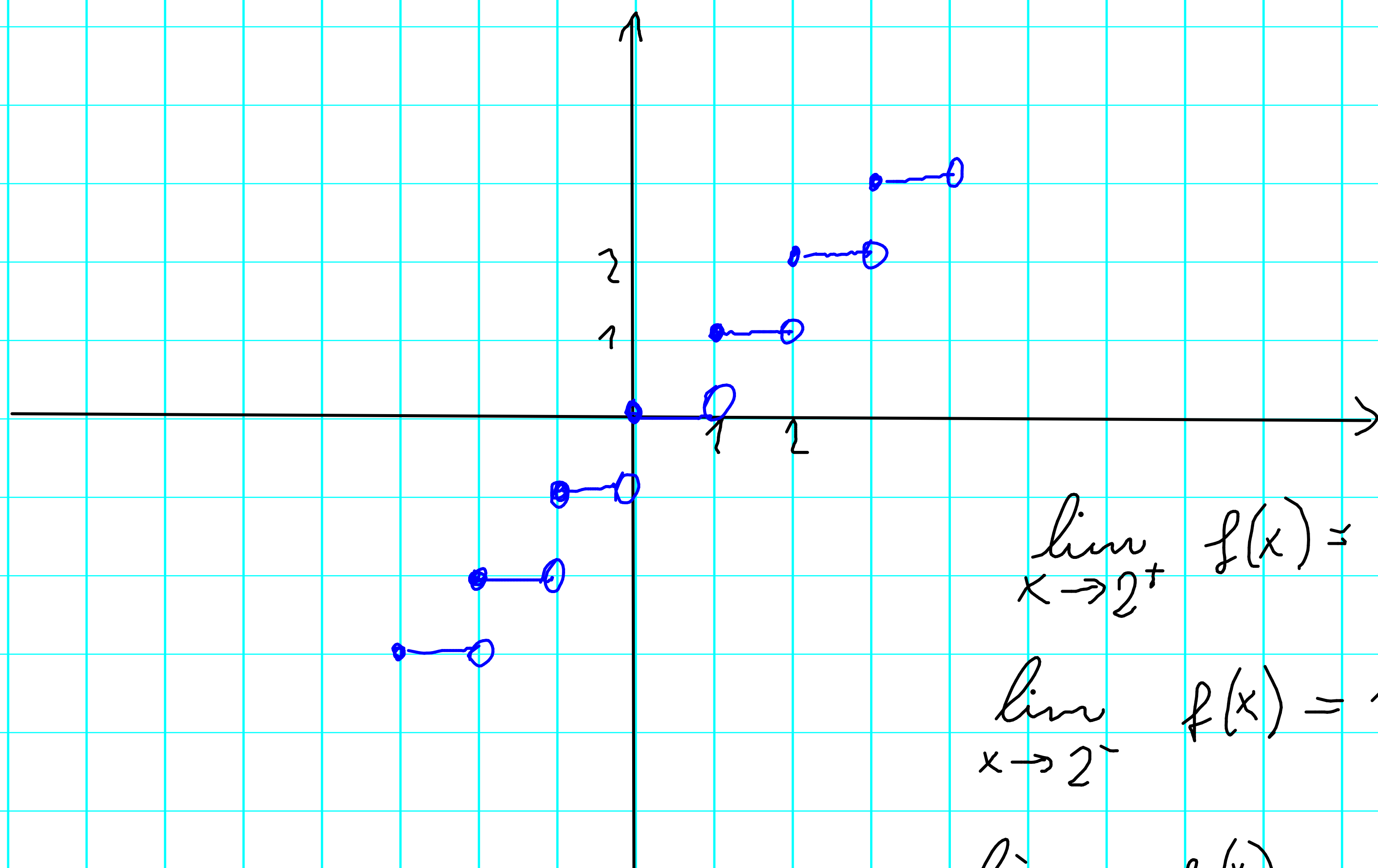
existiert nicht.



13) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = \lfloor x \rfloor$ ... größte ganze Zahl $\leq x$ (= abrunden).

z.B. $f(0.5) = 0$ $\quad f(3.14) = 3$

$f(-0.5) = -1$ $\quad f(-0.001) = -1$ $\quad f(0) = 0.$



„Treppenfunktion".

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

$\lim_{x \to 2} f(x)$ existiert nicht.

Definition. Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, dann heißt f stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert und gleich dem Funktionswert $f(x_0)$ ist. Sonst heißt f unstetig in x_0.

Weiters heißt f stetig auf D, wenn f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

ad Bsp 13. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist unstetig in allen $x_0 \in \mathbb{Z}$
und stetig in allen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Beispiele 14. $f(x) = 2x^2 + 11x + 2011$.

$x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} 2 \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} x}_{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} x}_{x_0} + \lim_{x \to x_0} 11 \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} x}_{x_0} + \lim_{x \to x_0} 2011$$

$$= 2x_0^2 + 11x_0 + 2011 = f(x_0)$$

stetig in x_0 ok

Satz. Seien f und g zwei stetige Funktionen in x_0. Dann sind auch

$$f+g, \quad f-g, \quad f \cdot g$$

stetig in x_0, weiters

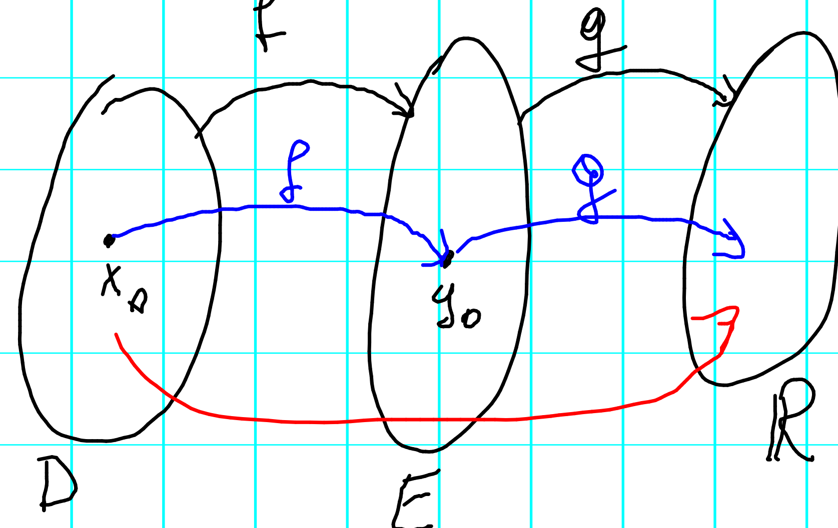
$$\frac{f}{g}$$

stetig in x_0, sofern $g(x_0) \neq 0$.

(Das folgt aus Grenzwertsätzen).

8.11.2011

Satz. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $y_0 = f(x_0)$. Wenn f in x_0 stetig ist und g in y_0 stetig ist, so ist $x \mapsto g(f(x))$ stetig in x_0.



Beweis. Wenn $x \to x_0$, so geht wegen Stetigkeit $y = f(x) \longrightarrow y_0 = f(x_0)$ und wegen Stetigkeit von g das $g(y)$ gegen $g(y_0)$, also

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0))$$ $\square$

Beispiel 15. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{für } x \neq 1 \\ 5 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

Wo ist Funktion stetig?

Für $x_0 \neq 1$ ist f in x_0 stetig (weil $\sqrt{x}$ stetig ist, was wir offiziell noch nicht wissen).

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \left(= \frac{0}{0} \right) \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - 1^2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{\sqrt{x}-1}} = \lim_{x \to 1} \sqrt{x}+1 = 2 \neq 5$$

$f(x)$ ist unstetig in $x = 1$.

Hingegen wäre $g: (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

stetig auf $\mathbb{R}$ gewesen.

<u>Definition</u> Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und x_0 ein einzelner Punkt, der in D „fehlt". Wenn $y_0 := \lim_{x \to x_0} f(x)$ existiert und endlich ist,

so heißt f stetig ergänzbar in x_0 und

$$\tilde{f}: D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R} \qquad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ y_0 & x = x_0 \end{cases}$$

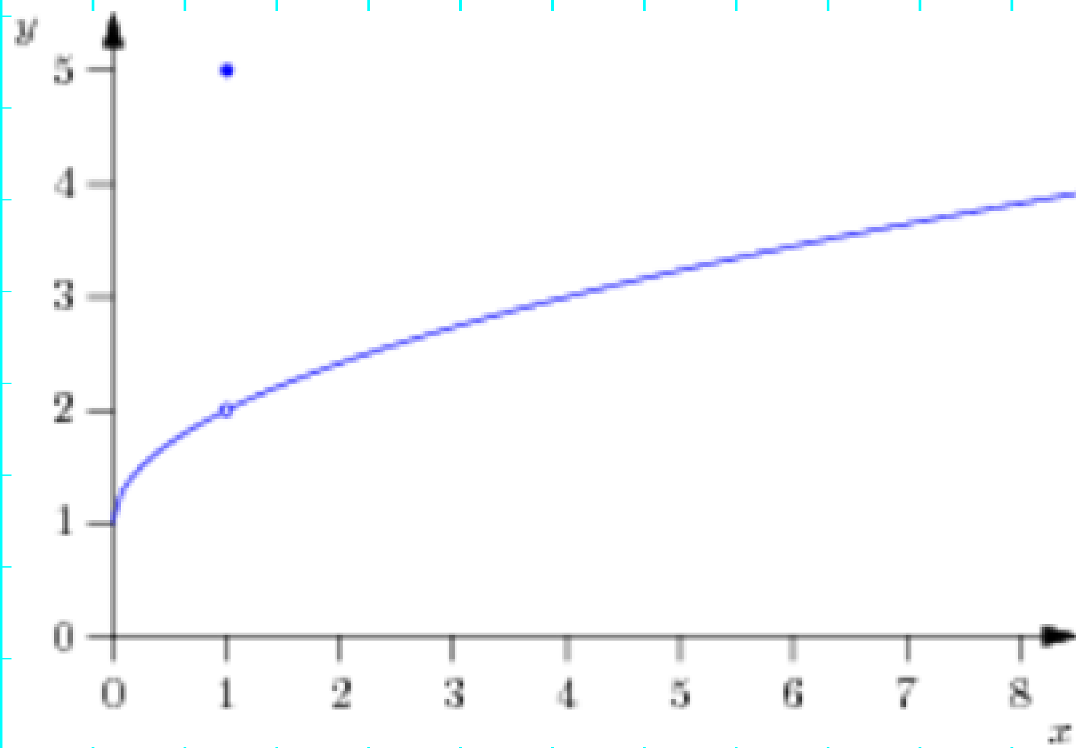
eine stetige Ergänzung von f. („hebbare Unstetigkeitsstelle") zu Bsp 15. $h : (0,\infty) \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1},$$

so ist nach obiger Bedingung h in 1 stetig ergänzbar und

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

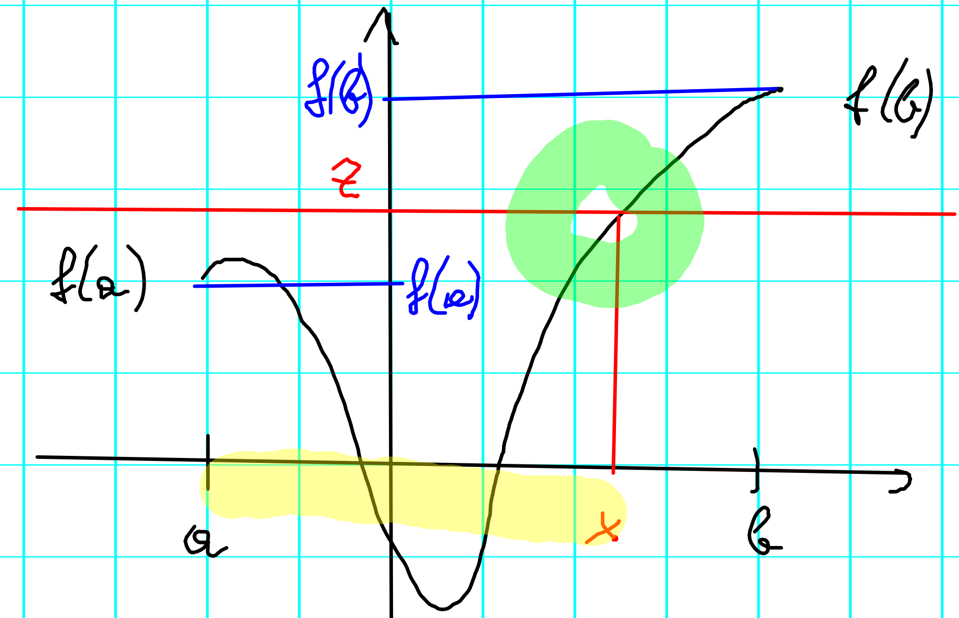
die stetige Ergänzung von h



$f(x)$ aus Bsp 15.

Satz (Zwischenwertsatz) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und z ein Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$.

Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = z$.



Begründung (Nehme an, dass $f(a) \le f(b)$),

Sei $K = \{ x \in [a,b] \mid f(x) \le z \}$

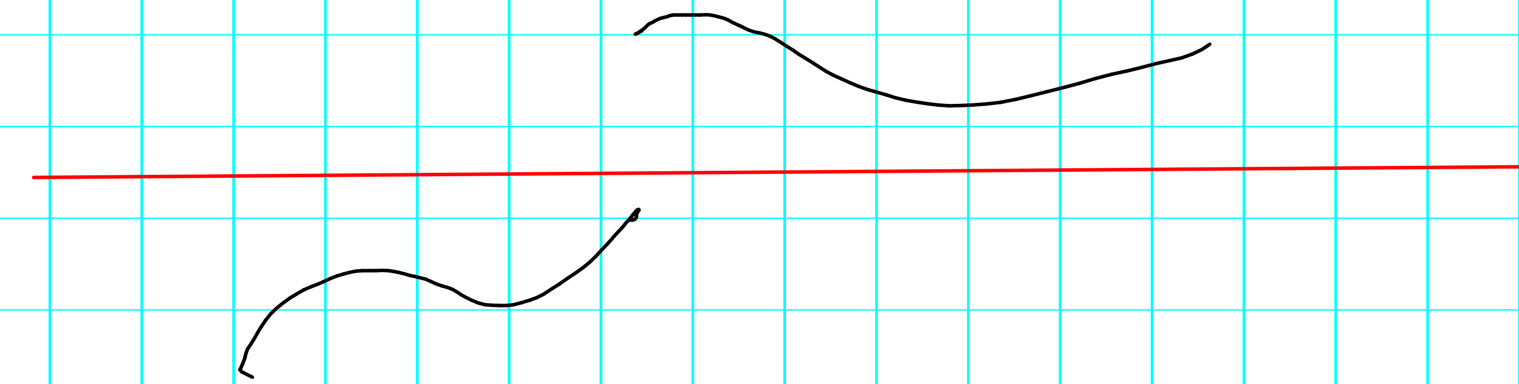
nehme „größtes" Element x_0 von K.

Es kann nicht sein, dass $f(x_0) < z$ (Annäherung von rechts)

$f(x_0) > z$ (— " — von links)

$\Longrightarrow f(x_0) = z$. $\square$

Bemerkung. Der Zwischenwertsatz liefert eine anschauliche Beschr. von Stetigkeit: stet. Fn haben keine Sprungstelle



man verwendet den Zwischenwertsatz öfter als man glaubt:

Beispiel 16. Löse die Ungleichung $x^2+x+1>0$

(A) Setze $f(x) = x^2+x+1$

Bestimme Nullstellen:

$$x^2+x+1=0 \iff x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-1} \notin \mathbb{R}$$

also keine reellen Nullstellen.

f ist als Zusammensetzung stetiger Fkt stetig.

$$f(3) = 13 > 0.$$

Angenommen, es gäbe ein $b \in \mathbb{R}$ mit $f(b) < 0$.

Dann wäre 0 ein Wert zwischen $f(b)$ und $f(3)$.

Lt. ZWS gäbe es dann ein x zwischen b und 3 mit

$$f(x) = 0.$$

Da es keine reellen Nullstellen gibt, ist das ein Widerspruch.

Also gibt es kein b.

Somit $x^2 + x + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(B) $$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{3}{4}}_{>0} > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(C) Lückentext aus A ... Finger weg!

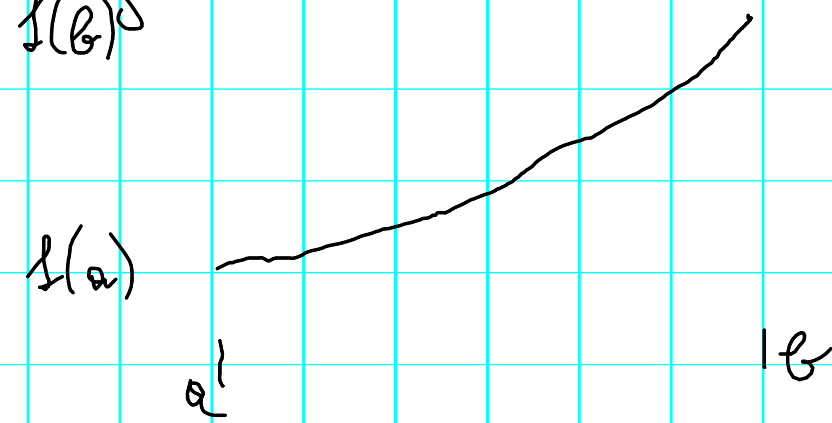
Satz Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Dann ist f für passendes $W = \underset{\text{streng monoton wachsend}}{[f(a), f(b)]}$ oder $W = \underset{\text{streng monoton fallend}}{[f(b), f(a)]}$ als Funktion $f : [a,b] \to W$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to [a,b]$ ist streng monoton und stetig.

Beispiel 16: $f : [0, 30] \to [0, 900]$; $f(x) = x^2$ streng monoton wachsend und stetig $(x^2 = x \cdot x)$

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion $g: [0, 900] \to [0, 30]$; $g(x) = \sqrt{x}$

streng monoton und stetig.

zum Satz: streng monoton wachsend.



Da streng monoton w, auch injektiv

(Wenn $x_1 < x_2$, dann $f(x_1) < f(x_2)$ und daher $f(x_1) \neq f(x_2)$)

$$\boxed{f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(y)}}$$

surjektiv durch richtige Wertemenge; Wenn $y_1 < y_2$, ~~so~~ ist $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ zu zeigen

Annahme, das sei falsch, also

$$x_1 := f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) =: x_2$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$$

Widerspruch.

Stetigkeit von f^{-1}: nicht ganz jugendfrei.

2.4. Elementare Funktionen

2.4.1. Konstante Funktionen

$f(x) = C$ konstant, stetig.

2.4.2. Lineare Funktionen

$f(x) = kx + d$ für Konstante k und d.

Beispiel. $f(x) = 11x + 13$

Lineare Funktionen sind stetig.

Wenn zwei Funktionswerte $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $x_1 \neq x_2$

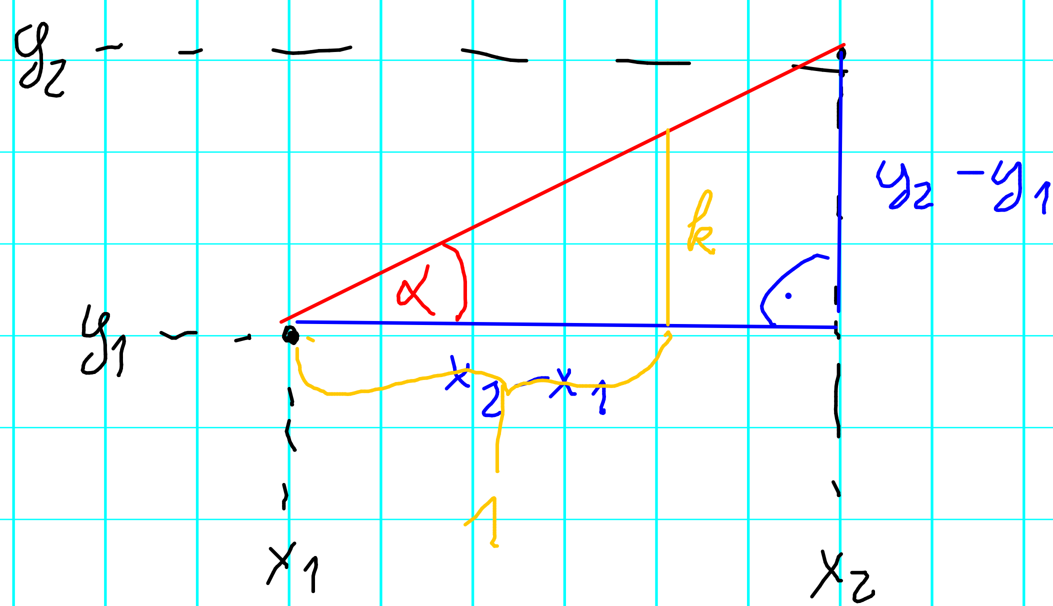
gegeben sind, kann man k und d rekonstruieren:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= k \cdot x_1 + d \qquad \mid (-1) \\ y_2 &= k \cdot x_2 + d \end{aligned}\right\} +$$

$$y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1) \qquad \Big| : (x_2 - x_1) \neq 0$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{... kenne } k.$$

$$d = y_1 - k\,x_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,x_1$$



$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$$

konstant.

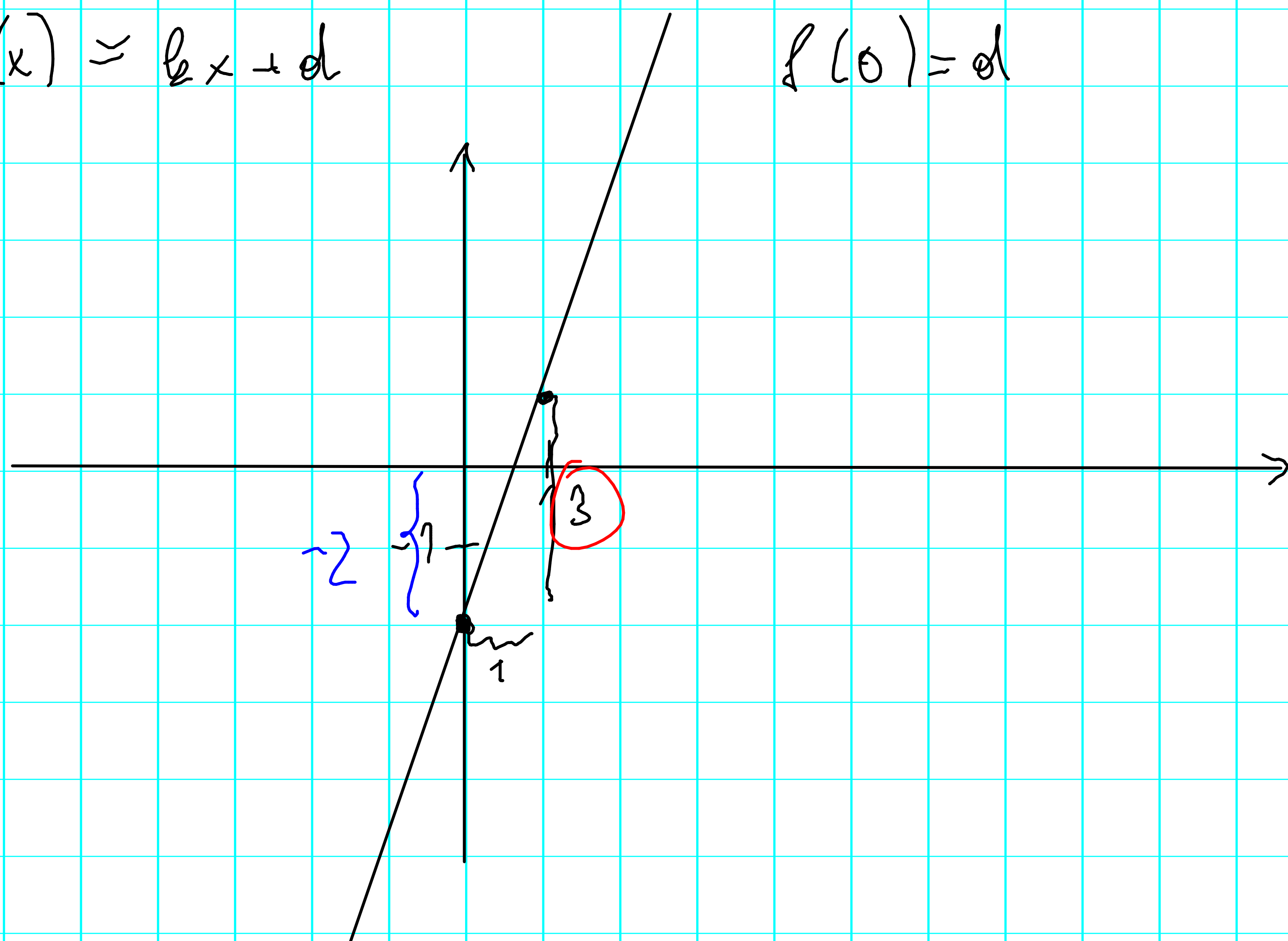
eine lin. Fn stellt eine Gerade in der Ebene dar.

$$\frac{k}{1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Strahlensatz.

k heißt Steigung: Änderung von Funktionswert, wenn sich x um 1 erhöht.

$f(x) = kx + d$ $\qquad$ $f(0) = d$



$f(x) = 3x - 2$

Spezialfall $d=0$: „direkte Proportionalität“.

$$20 \text{ USD} \;---\; 15\text{ €}$$
$$30 \text{ USD} \;---\; ?\text{ €}$$

$E(x) = kx$.
$E(0) = 0$.

$$k = \frac{15-0}{20-0}$$

$$E(30) = 30 \cdot \frac{15}{20} = \frac{30 \cdot 15}{20}$$

„Schlussrechnung“
„Dreisatz“.

2.4.3. Quadratische Funktionen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a, b, c konstant.
stetig.

Beispiel.

$$f(x) = 11x^2 + 27x + 8 =$$
$$= 11\left(x^2 + \frac{27}{11}x\right) + 8 =$$

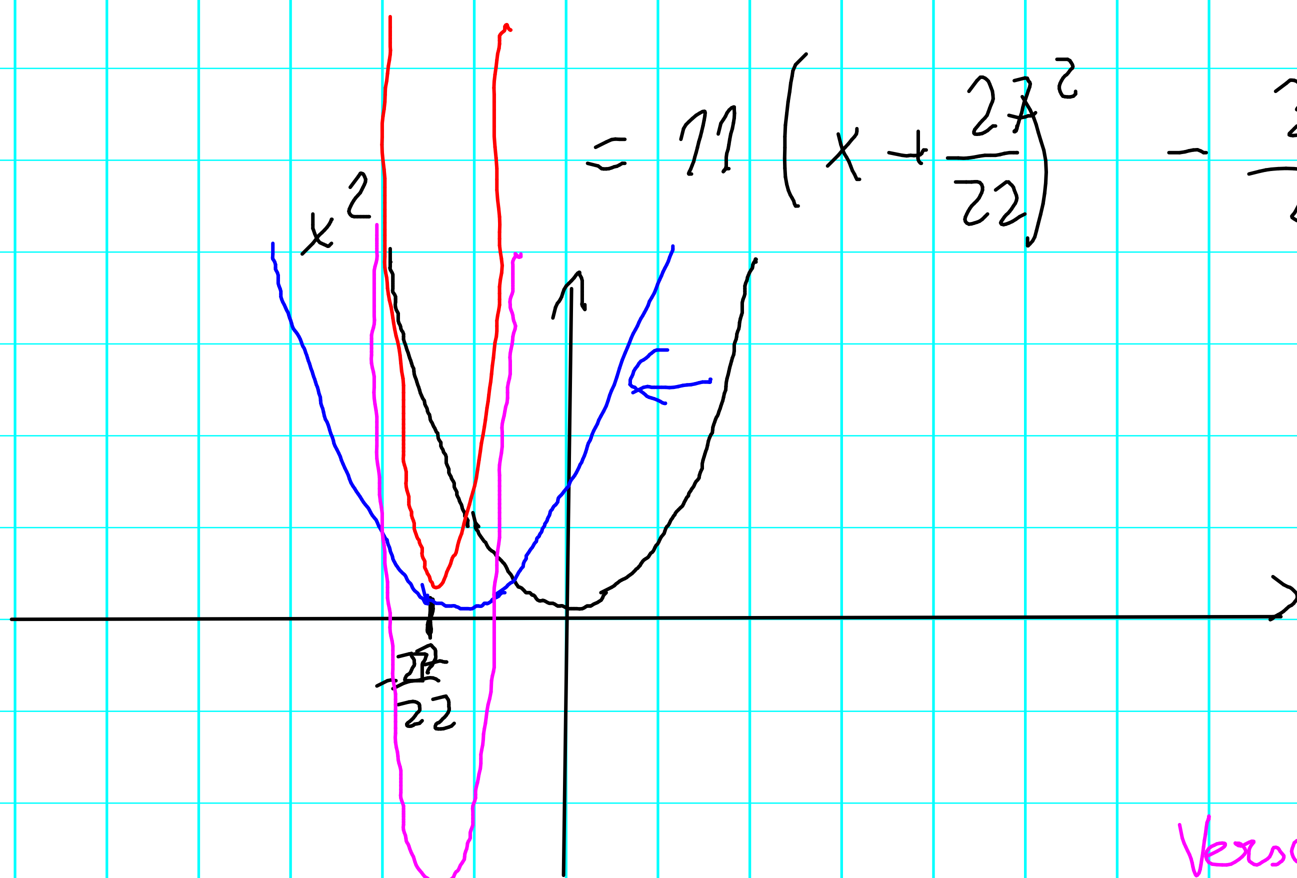
$$= 11\left(x^2 + \frac{27}{22}2x + \left(\frac{27}{22}\right)^2\right) + 8 - 11\cdot\frac{(27)^2}{(22)^2}$$

$$= 11\left(x + \frac{27}{22}\right)^2 + \underbrace{8 - \frac{27\cdot 27}{4\cdot 11}} -$$

$$\underbrace{8 - \frac{729}{44}}$$

$$-\frac{377}{44}$$

$$= 11\left(x + \frac{27}{22}\right)^2 - \frac{377}{44}$$



nach links um $+\frac{27}{22}$

$\left(x + \frac{27}{22}\right)^2$

Skalierung y mit Faktor 11

$11\left(x + \frac{27}{22}\right)^2$

Verschieben um $-\frac{377}{44}$ nach oben

2.4.4. Allgemeine Potenzfunktion

$f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N}.$

stetig --- $x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$

Fall 1: n ungerade

$f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$ --- ungerade Funktion.

streng monoton wachsend (hier ohne Beweis)

$\lim_{x \to \infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty.$

Umkehrfkt.: $\sqrt[n]{} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend stetig.

Fall 2 n gerade.

$f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$ $\Rightarrow$ gerade Funktion.

$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$

nicht bijektiv auf $\mathbb{R}$;

streng m. w. als Fn: $[0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$

Umkehrfn: $\sqrt[n]{} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ streng monot. w., stetig.

Bemerkung Hier wurde gerade festgelegt, dass z.B. $\sqrt{}$ immer Ergebnisse ≥ 0 liefert, $\sqrt{25} = 5$.

2.4.5. Polynomfunktionen

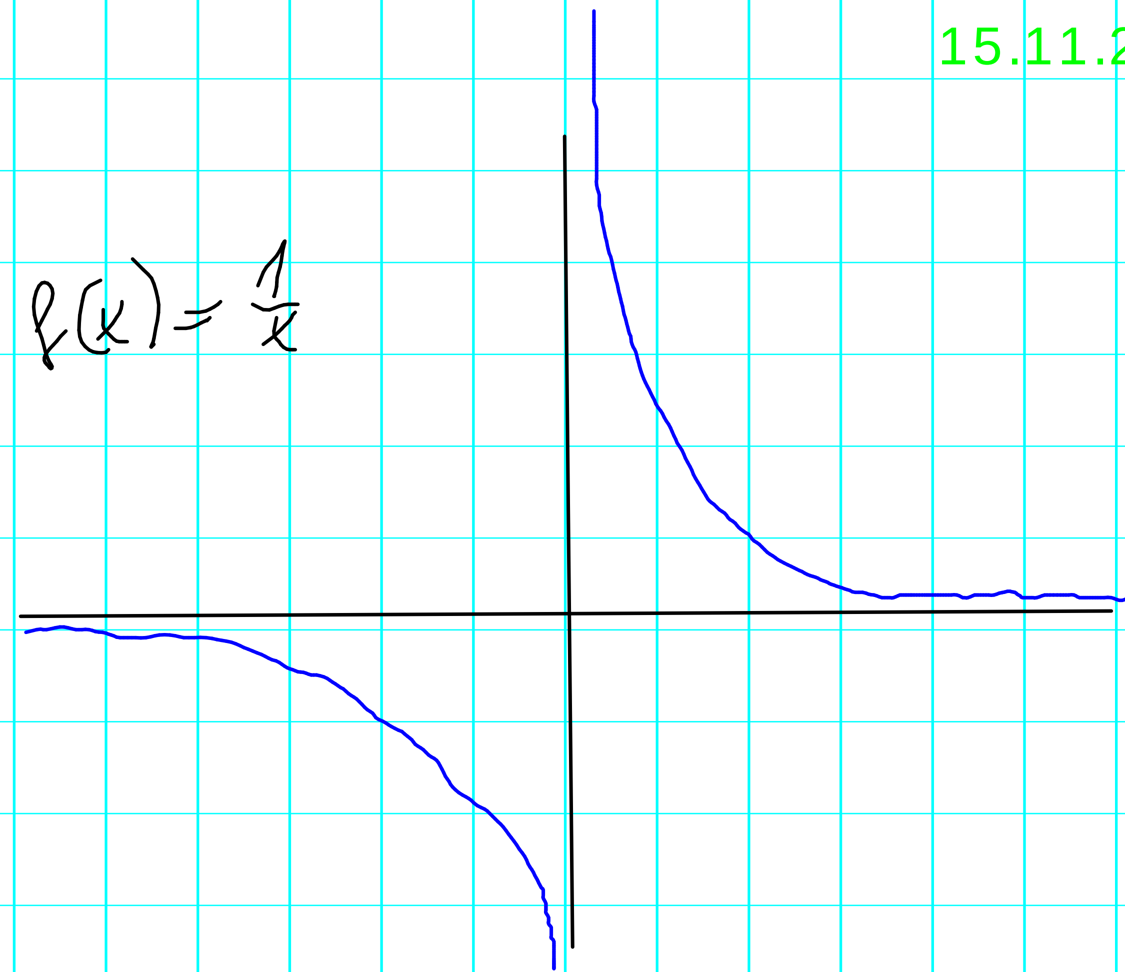
Siehe Kap 1; immer stetig $f(x) = a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0$

15.11.2011

2.4.6. Funktion $1/x$

$$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$



$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Bijektiv. Umkehrfn: $y = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{y}$

Die Funktion ist ihre eigene Umkehrfunktion

Die Funktion steht hinter indirekter Proportionalität.

$f(x) = \frac{C}{x}$ für bestimmtes C konstant.

Bekannt: $f(x_1) = y_1$

$x_1 \dashrightarrow y_1$

$x_2 \dashrightarrow ?$

ges. $f(x_2)$

$y_1 = \frac{C}{x_1} \Longrightarrow C = x_1 y_1 \qquad f(x_2) = \frac{x_1 \cdot y_1}{x_2}$

2.4.2 Rationale Funktionen

Definition: Eine rationale Funktion ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sind.

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2 + x + 5}{x + 2}$ ... rationale Funktion.

Definitionsmenge einer rationalen Funktion

$$D = \mathbb{R} \setminus \{ \alpha \mid \alpha \text{ ist Nullstelle von } q(x) \}.$$

rationale Funktionen sind auf ihrer Definitionsmenge stetig.

<u>Definition</u>. Wenn α eine Nullstelle des Nenners, aber keine Nullstelle des Zählers ist, so heißt α ein Pol von f.

Wenn α ein Pol von f ist, so gilt

$$\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = +\infty \text{ oder } -\infty$$

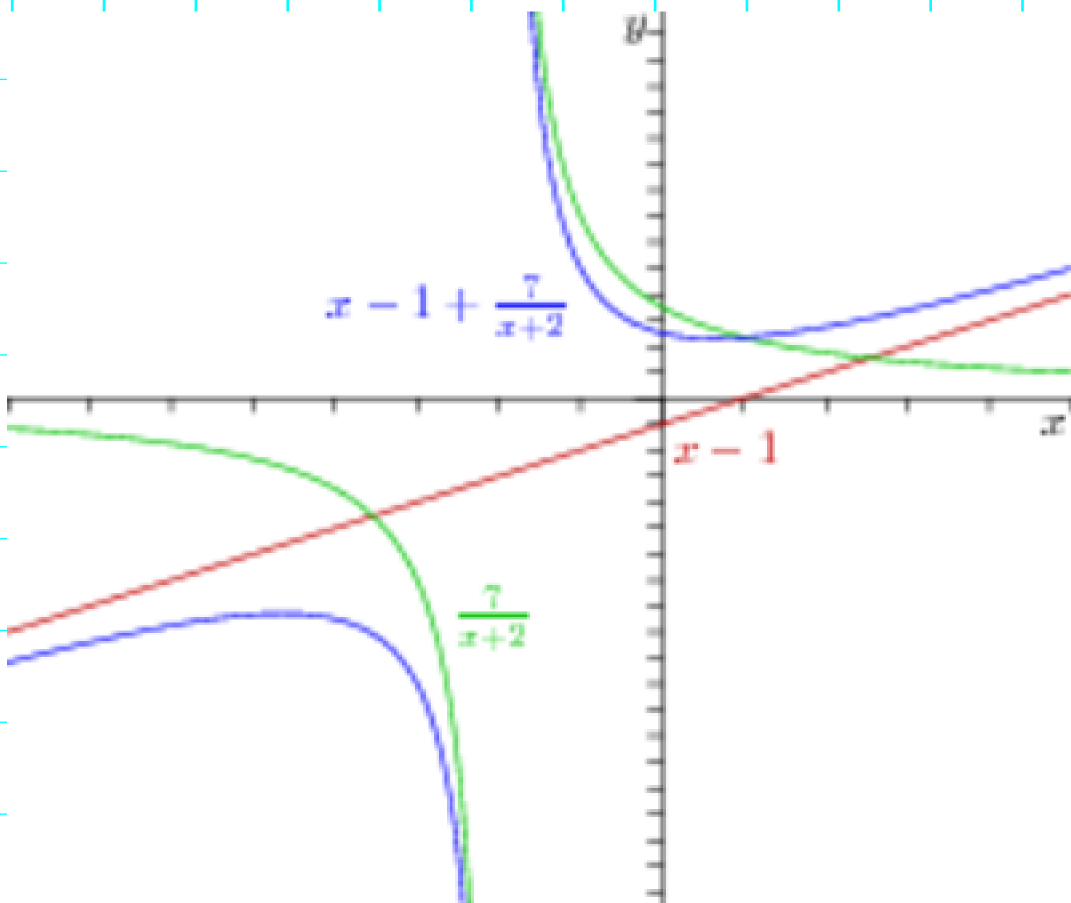
$$\lim_{x \to \alpha^-} f(x) = +\infty \text{ oder } -\infty .$$

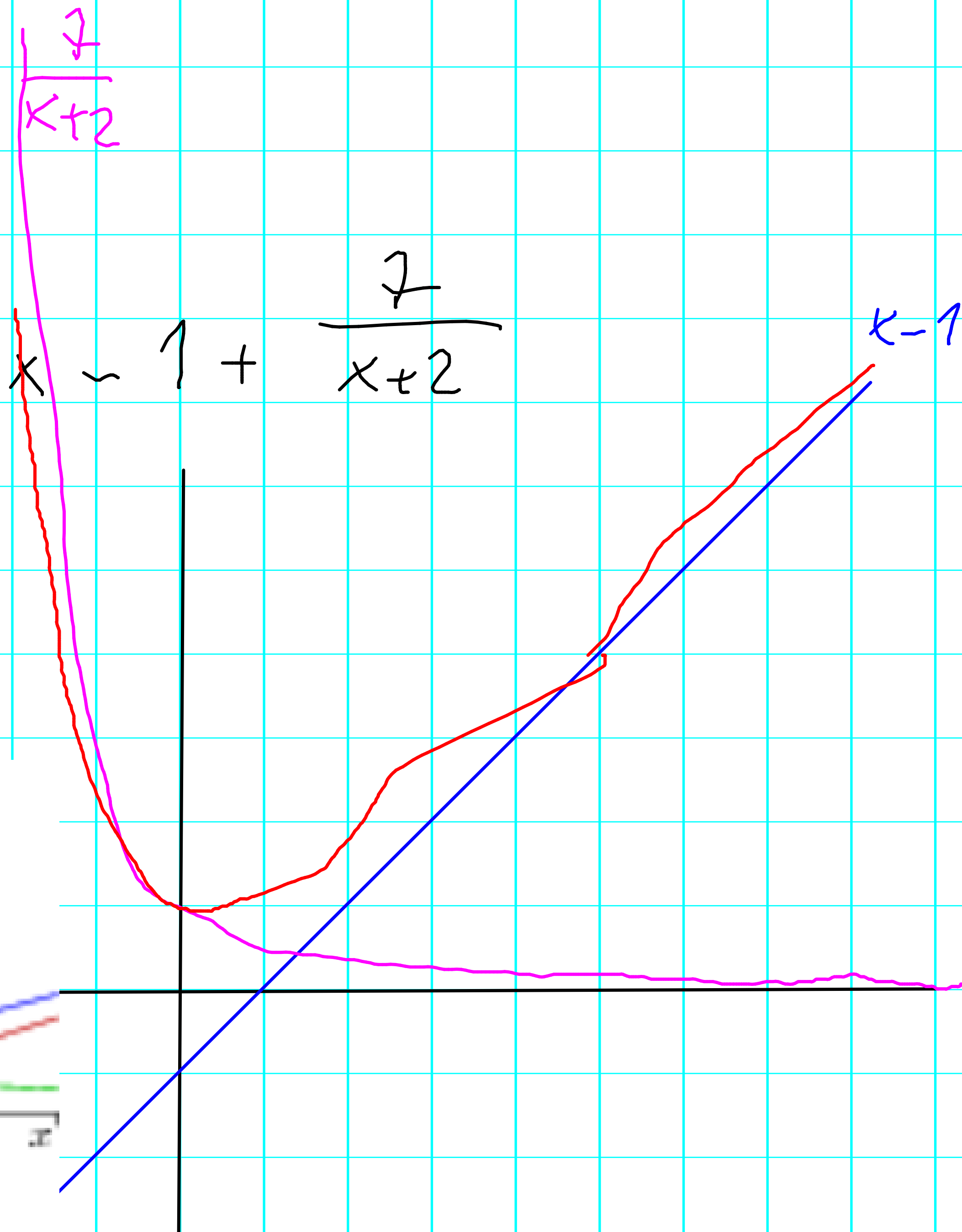
Polynomdivision kann bei Verständnis einer Funktion helfen:

ad Bsp. $\quad f(x) = \dfrac{x^2+x+5}{x+2}$

$$(x^2+x+5) : (x+2) = x - 1 + \frac{7}{x+2}$$

$$\begin{array}{l} -(x^2+2x) \\ \hline \quad -x+5 \\ \quad -(-x-2) \\ \hline \qquad 7 \end{array}$$





Bemerkung. Noch mehr hilft Partialbruchzerlegung (vgl. Sommersemester)

2.4.8. Exponentialfunktion

Definition. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann definiere

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Kommt da was Vernünftiges heraus?

z.B. $x = 1$.

$$2.5 = 1 + 1 + \frac{1}{2} \leq \exp(1) \leq 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \dots\right) =$$

$$= 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^N + \dots\right)$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$a^{N+1} - b^{N+1} = (a-b)\left(a^N + a^{N-1} b + \ldots + b^N\right)$$

für $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$

$$= 2 + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

<u>Definition</u> $e := \exp(1)$ ---- Eulersche Zahl.

Was passiert, wenn wir $\exp(x)$ mit $\exp(y)$ multiplizieren,

$$\exp(x)\exp(y) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + (x+y) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{xy}{1!\,1!} + \frac{y^2}{2!}\right) + \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!}\frac{y^1}{1!} + \frac{x^1}{1!}\frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!}\right) + \ldots$$

$$= 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}\underbrace{\left(x^2 + 2xy + y^2\right)}_{(x+y)^2} + \frac{1}{3!}\underbrace{\left(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\right)}_{(x+y)^3} +$$

$$+ \frac{1}{4!}\left(x^4 + \underbrace{\frac{4!}{3!\,1!}}_{=\binom{4}{1}} x^3y + \underbrace{\frac{4!}{2!\,2!}}_{=\binom{4}{2}} x^2y^2 + \underbrace{\frac{4!}{1!\,3!}}_{=\binom{4}{3}} xy^3 + y^4\right)$$

Binom LS

$$= 1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^4}{4!} + \ldots = \exp(x+y)$$

$$\boxed{\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)}$$

$$\exp(2) = \exp(1+1) = \exp(1)\exp(1) = e \cdot e = e^2$$
$$\exp(3) = \exp(2+1) = \exp(2)\exp(1) = e^2 \cdot e = e^3$$

$$\exp(2011) = e^{2011}.$$

$\exp(n) = e^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

$\exp\left(\frac{1}{2}\right) = ?$ $e = \exp(1) = \exp\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\right) =$

$= \left(\exp\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \Longrightarrow \exp\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$

$\exp\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{e}$ für $n \in \mathbb{N}$.

$\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \sqrt[q]{e^p}$ $p, q \in \mathbb{N}$

Aber auch $\exp(e) \approx 15.15\ldots$.

Weiters gilt: $\exp(0) = 1 + 0 + \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3!} + \ldots = 1$.

$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x)$

$\Longrightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Wenn $x>0$, so ist $\exp(x) > 1$ und daher $0<\exp(-x)<1$

$\Rightarrow$ $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Monotonie: Wenn $a<b$, so gilt

$$\exp(b) = \exp\big(a+(b-a)\big) = \exp(a)\,\underbrace{\exp(\underbrace{b-a}_{>0})}_{>1} > \exp(a)\cdot 1 = \exp(a).$$

$\rightarrow$ streng monoton wachsend.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\cancel{1}+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots \cancel{-1}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\dots\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \exp(x) = 1.$$

$$\lim_{x\to x_0} \exp(x) = \lim_{x\to x_0} \exp\big(x_0 + (x-x_0)\big) = \lim_{x\to x_0} \exp(x_0)\underbrace{\exp(x-x_0)}_{\to 1} = \exp(x_0)$$

Exponentialfunktion ist stetig.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^{17}} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\cancel{x^{17}}}\left(\frac{x^{\cancel{17}}}{17!} + \frac{x^{\cancel{18}}}{18!}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{17!} + \frac{x}{18!} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$$ für $n \in \mathbb{N}_0$ „exp(x) wächst schneller als jedes Polynom".

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \exp(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{\exp(-x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{\exp(-x)}{x^n}}_{\to\infty}} = 0.$$

Satz. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetige monoton wachsende Funktion, es gilt

- $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ $\qquad x, y \in \mathbb{R}$
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ $\qquad x \in \mathbb{R}$
- $\exp\left(\frac{p}{q}x\right) = \sqrt[q]{\exp(x)^p}$ $\qquad$ für $x \in \mathbb{R}$, $p, q \in \mathbb{N}$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\exp(x)}{x^n} = \infty$ $\qquad n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \exp(x) = 0$ $\qquad n \in \mathbb{N}$.

Schreibe $\exp(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2.4.9. Natürlicher Logarithmus

Da $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng monoton wachsend und bijektiv ist, besitzt exp dort eine Umkehrfunktion.

Definition. $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ „natürlicher Logarithmus" ist als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definiert, also

$$\ln a = b \iff a = \exp(b).$$

Eigenschaften:

- $\ln a$ ist streng monoton wachsend und stetig.
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\ln 1 = 0$ (weil $\exp(0) = 1$).
- $\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$
- $\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$
- $x \ln a = \ln(a^x)$ für $x \in \mathbb{N}$ (und andere, siehe später).

$\ln a =: u \iff a = \exp(u)$

$\ln b =: v \iff b = \exp(v)$

$\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v) = a \cdot b$

$\iff u + v = \ln(a \cdot b)$

Beispiel: Wir legen 1 € auf ein Sparbuch mit Zinssatz 1% (in Steueroase).

Nach 1 Jahr 1.01 €

2 Jahren $(1.01)^2$

Nach n Jahren: $(1.01)^n$.

Nach wie vielen Jahren erhalte 17 € ?

$$(1.01)^n = 17$$

Wende ln an (ist Äquivalenzumf., weil ln bijektiv)

$$n \ln(1.01) = \ln\left((1.01)^n\right) = \ln(17)$$

$$\Longrightarrow \quad n = \frac{\ln(17)}{\ln(1.01)} \approx 284.7 \quad \text{Jahre.}$$

2.4.10. Allgemeine Exponentialfunktion & Logarithmen zu bel. Basen

Definition: Sei $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann definiere

$$a^x = \exp(x \cdot \ln a)$$

„Exponentialfunktion zur Basis a"

Eigenschaften:

$$a^{x+y} = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x \ln a + y \ln a) =$$

$$= \exp(x \ln a) \cdot \exp(y \ln a) = a^x \cdot a^y .$$

$$a^1 = \exp(1 \cdot \ln a) = \exp(\ln a) = a.$$

$$a^0 = \exp(0 \cdot \ln a) = \exp(0) = 1.$$

Wenn $a > 1$: streng m. w.

$a < 1$ streng m. f.

22.11.2011

Definition. Die Umkehrfunktion der allg. Exponentialfunktion wird als Logarithmus zur Basis a bezeichnet, schreibe $\log_a z$, also

$$\log_a y = x \iff y = a^x$$

Eigenschaften

- $\log_a : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.
- streng monoton wachsend für $a > 1$
- streng monoton fallend für $a < 1$
- $\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$
- $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

$\left(a^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)\right)$

} wegen Monotonie von a^x

$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$

Für letzten Punkt: schreibe $\log_a x = y$

$$\iff x = a^y = \exp(y \cdot \ln a)$$

$$\iff \ln x = y \ln a \qquad \big| : \ln a$$

$$\iff y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

also $$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

2.4.11 Hyperbel- und Areafunktionen

Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ definiere

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ „cosinus hyperbolicus"

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ „sinus hyperbolicus"

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$ „tangens hyperbolicus"

Eigenschaften.

- $\cosh x$ ist gerade Funktion, $\sinh x$ ist ungerade Funktion.

  $\left(\sinh(-x) = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-(-x)}\right) = -\frac{1}{2}\left(-e^{-x} + e^{x}\right) = -\sinh(x) \right)$

- $\sinh x$ ist streng monoton wachsend und stetig, $\cosh x$ streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$, streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$; stetig überall.

  (Monotonie siehe später, Stetigkeit als Zusammens. stet. Fn)

- $\cosh(0) = 1 \qquad \sinh(0) = 0$
- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

$$\left((\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}} - \left(\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}}\right)\right) = 1 \right)$$

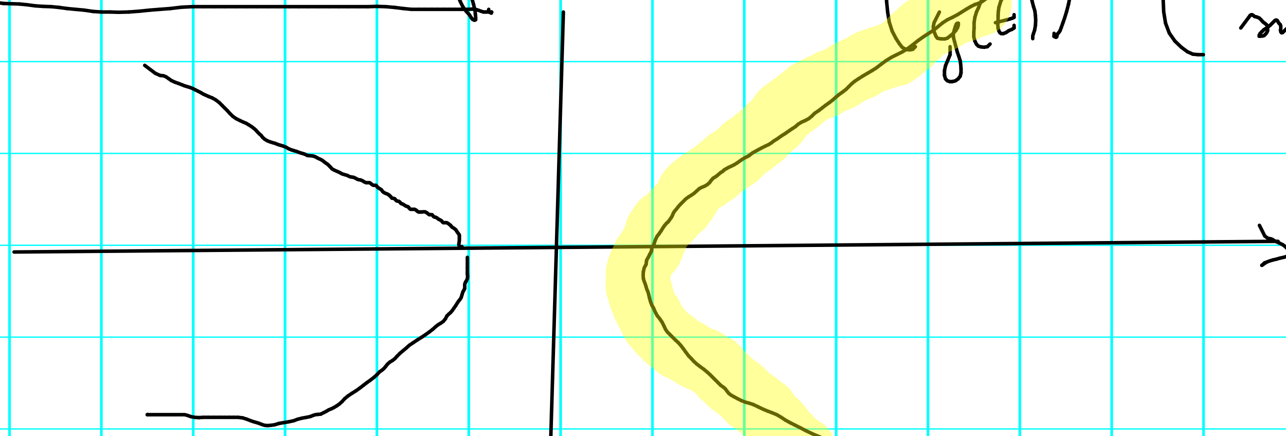
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \cosh x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \sinh x = +\infty$

  $\lim\limits_{x\to-\infty} \cosh x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x = -\infty$

$$\left(\lim_{x\to\infty} \cosh x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\Big(\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{e^{x}} + \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{e^{-x}} \Big) = \infty \quad \text{usw} \right).$$

<u>Geometrische Deutung</u> Kurve $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ --- $x^2 - y^2 = 1$,

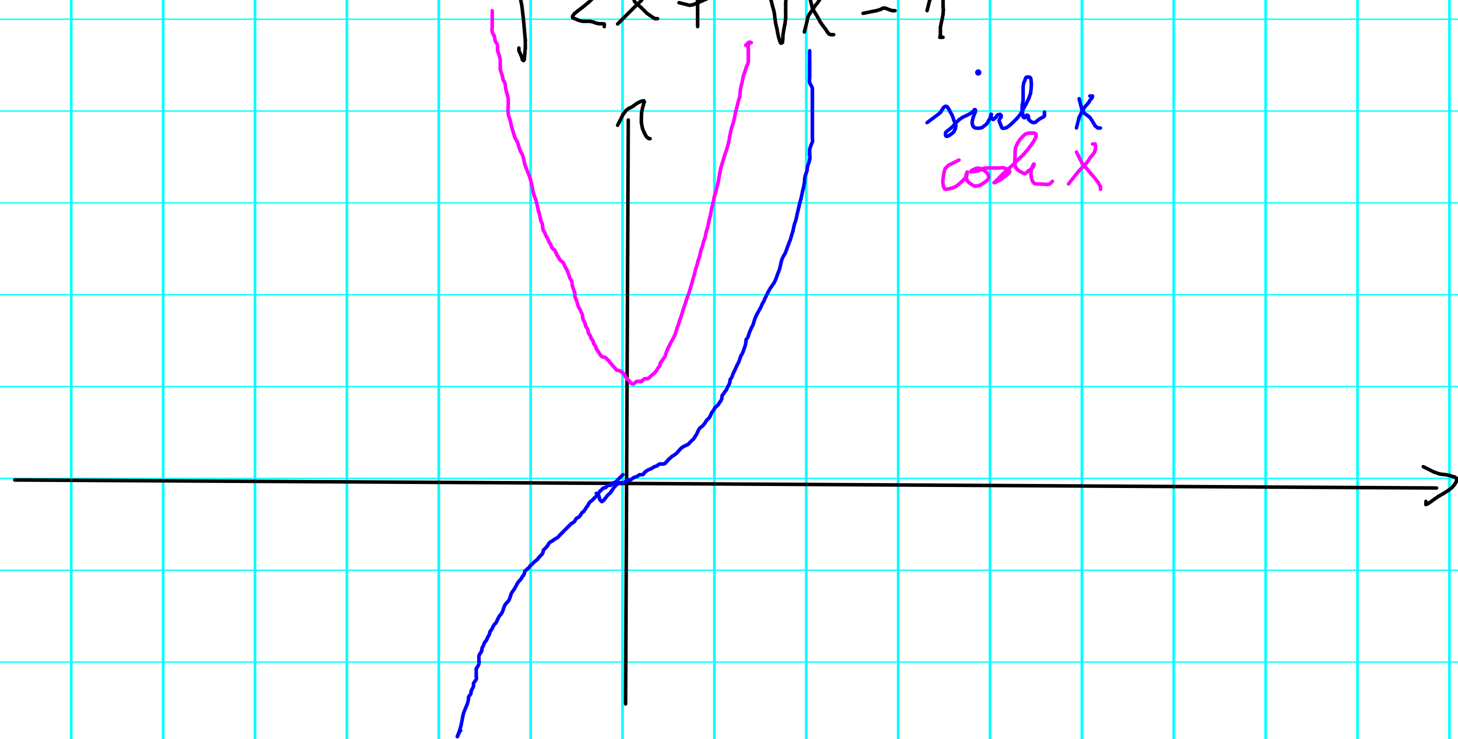
Hyperbel in 1. Hauptlage
(vgl Math 0 Kap 5)



die Hyperbelfunktionen erlauben auch die Berechnung gewisser Integrale, z.B

$$\int \frac{1}{2x+\sqrt{x^2-1}}\,dx$$ siehe Kärz.

Bild



Umkehrfunktionen. • $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, streng monot wachsend,
Umkehrfunktion heißt arsinh „area sinus hyperbolicus"
$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

• $\cosh : [0,\infty) \to [1,\infty)$ streng monot. wachsend,
Umkehrfu heißt arcosh „area cosinus hyperbolicus"

$\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$

Man kann arsinh und arcosh durch ln und $\sqrt{}$ ausdrücken:

$$\operatorname{arsinh} x = y \iff x = \sinh y$$

$$\iff x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \iff x = \frac{e^y - \frac{1}{e^y}}{2}$$

Nenne $e^y = z$, also $\iff x = \dfrac{z - \frac{1}{z}}{2} \quad \Big| \cdot 2z$

$$\iff 2xz = z^2 - 1$$

$$\iff 0 = z^2 - 2xz - 1$$

$$\iff z = x \pm \sqrt{\underbrace{x^2 + 1}_{> x^2 \geq 0}}$$

Wegen $z = e^y$ folgt $z > 0$, wegen $\sqrt{x^2+1} > x$ kann nur $+$ vor der Wurzel stehen, also

$$\iff z = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^y = x + \sqrt{x^2+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

Also: $\quad \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

2.4.12. Trigonometrische und Arcusfunktionen

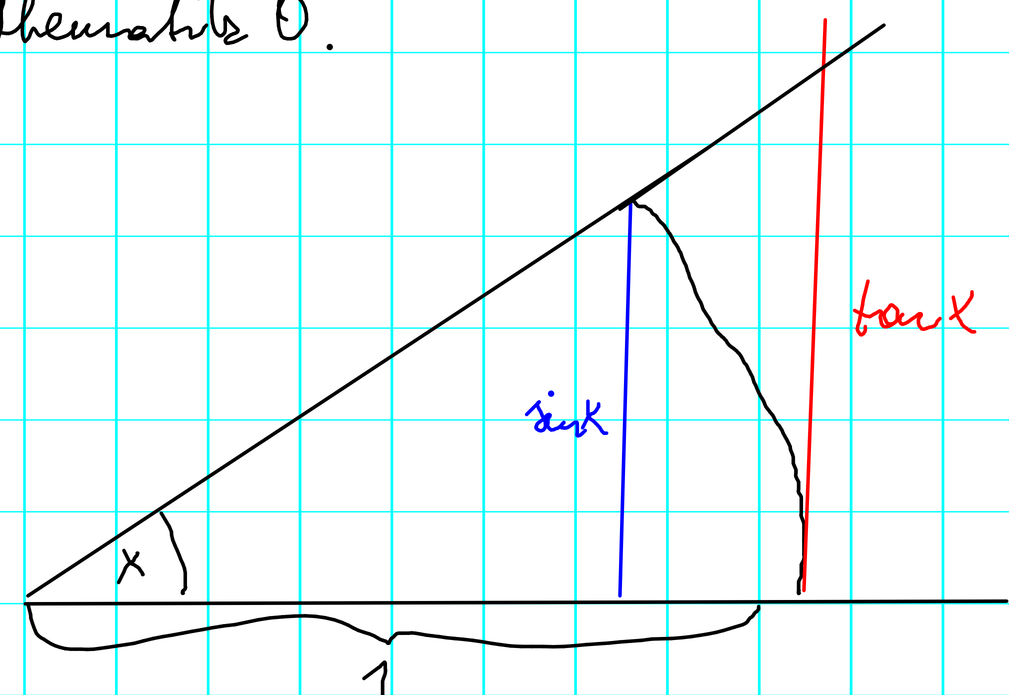
<u>Definition</u> sin, cos, tan, cot heißen trigonometrische Funktionen

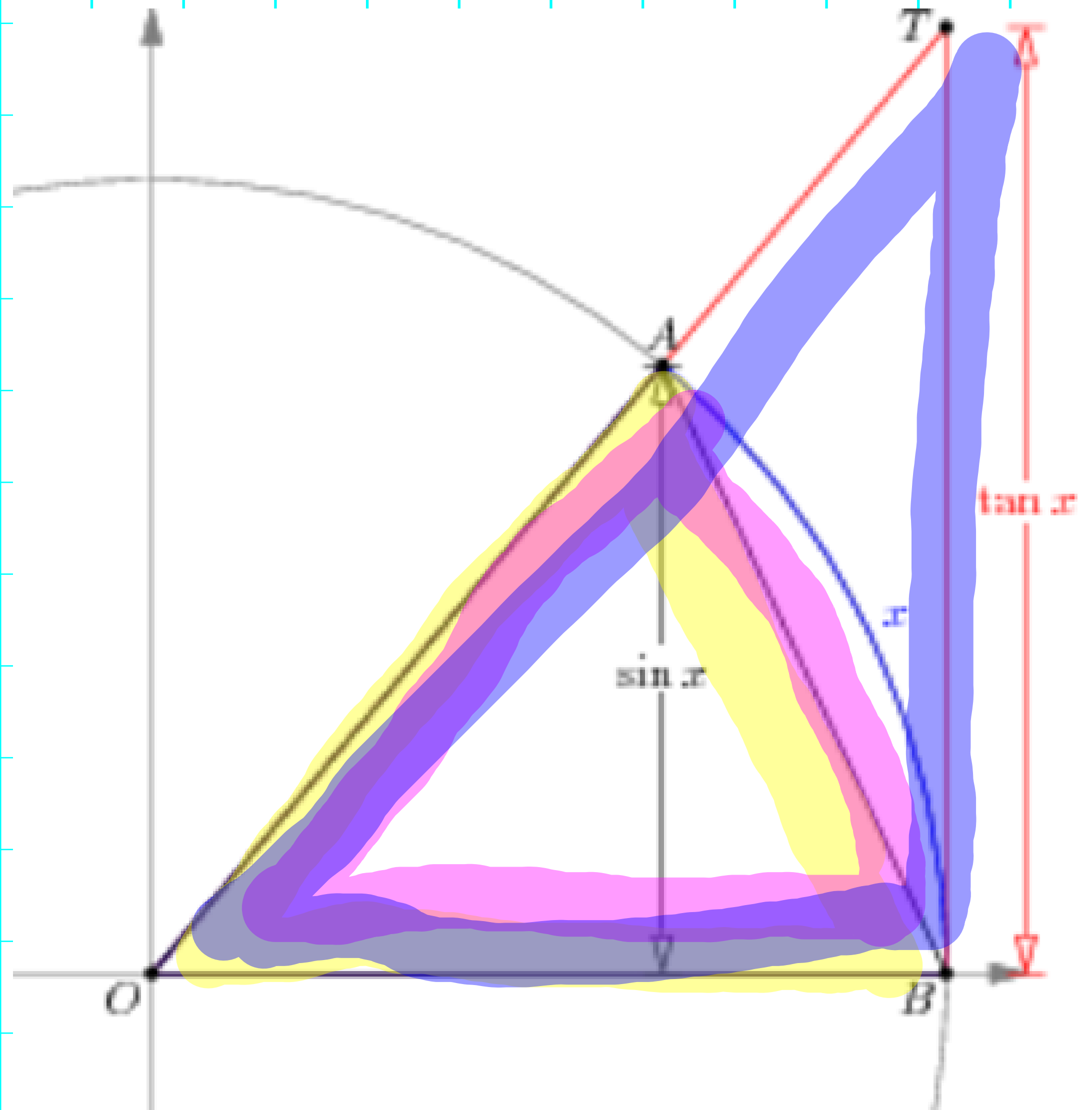
Diverse Eigenschaften vgl Mathematik 0.

<u>Satz</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

<u>Begründung</u>:





vergleiche Flächeninhalte von

$\triangle$ OBA, Kreissegment OAB, $\triangle$ OBT

$$\frac{1\cdot\sin x}{2} \leq \pi\cdot\frac{x}{2\pi} \leq 1\cdot\frac{\tan x}{2}$$

Mult. mit $\frac{2}{\sin x}$:

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

lim $x \to 0$

$$1 \leq \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{1}$$

Einzwicksatz.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1, \text{ also auch } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad \square$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

vgl TO

$$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$- \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$
$$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Also

4

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned}\right\}$$

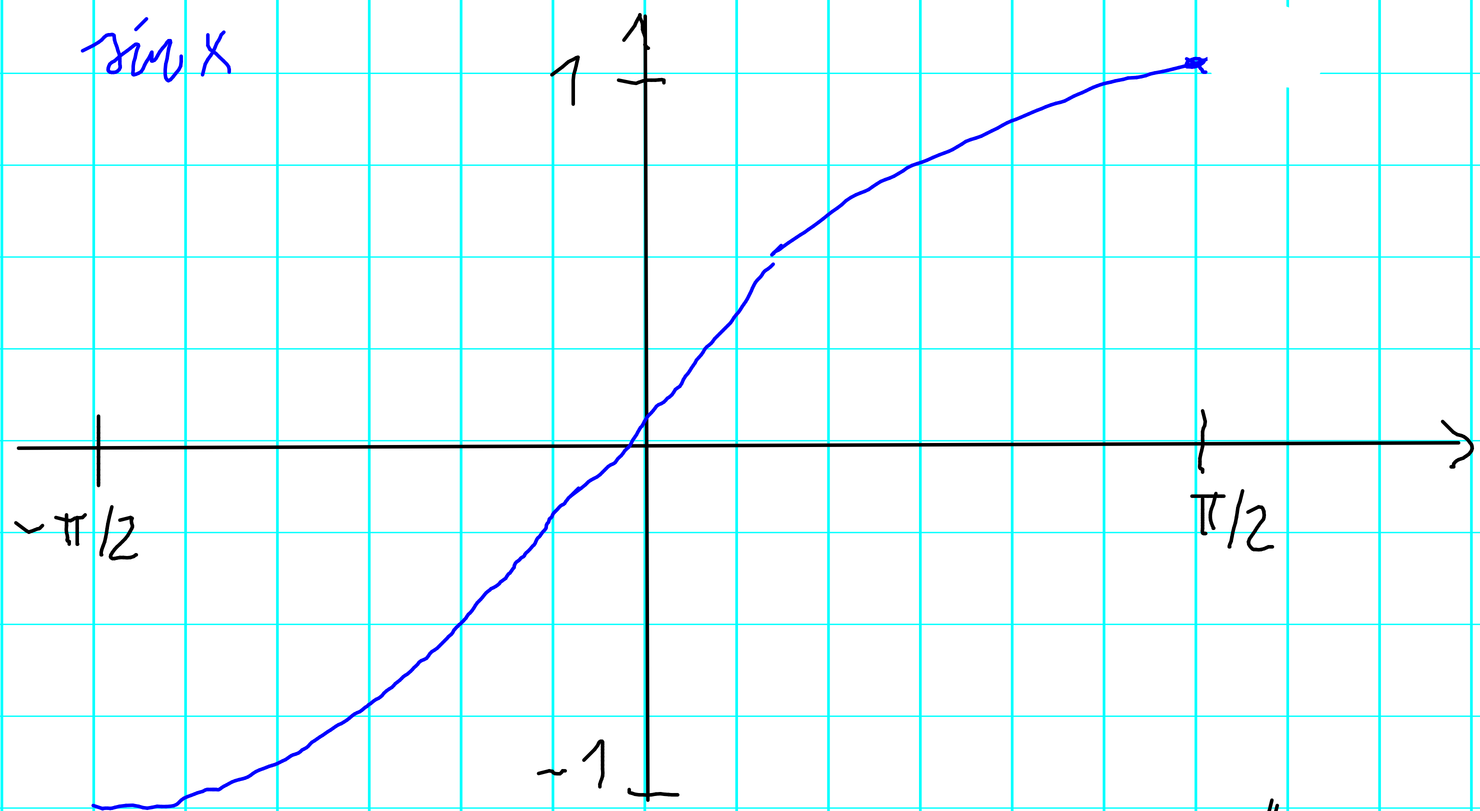
„2. Additionstheoreme".

<u>Beispiel.</u>

$$\lim_{\alpha\to\beta}\frac{\sin(\alpha)-\sin\beta}{\alpha-\beta} = \lim_{\alpha\to\beta}\frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\alpha-\beta} =$$

$$= \lim_{\alpha\to\beta}\underbrace{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}_{\to\cos\left(\frac{\beta+\beta}{2}\right)}\cdot\underbrace{\frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\frac{\alpha-\beta}{2}}}_{\to 1} = \cos\beta$$

<u>Umkehrfunktionen</u>



$\sin x: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$

streng monoton wachsend

Die Umkehrfunktion auf diesem Intervall heißt Arcus-Sinus

$\arcsin: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

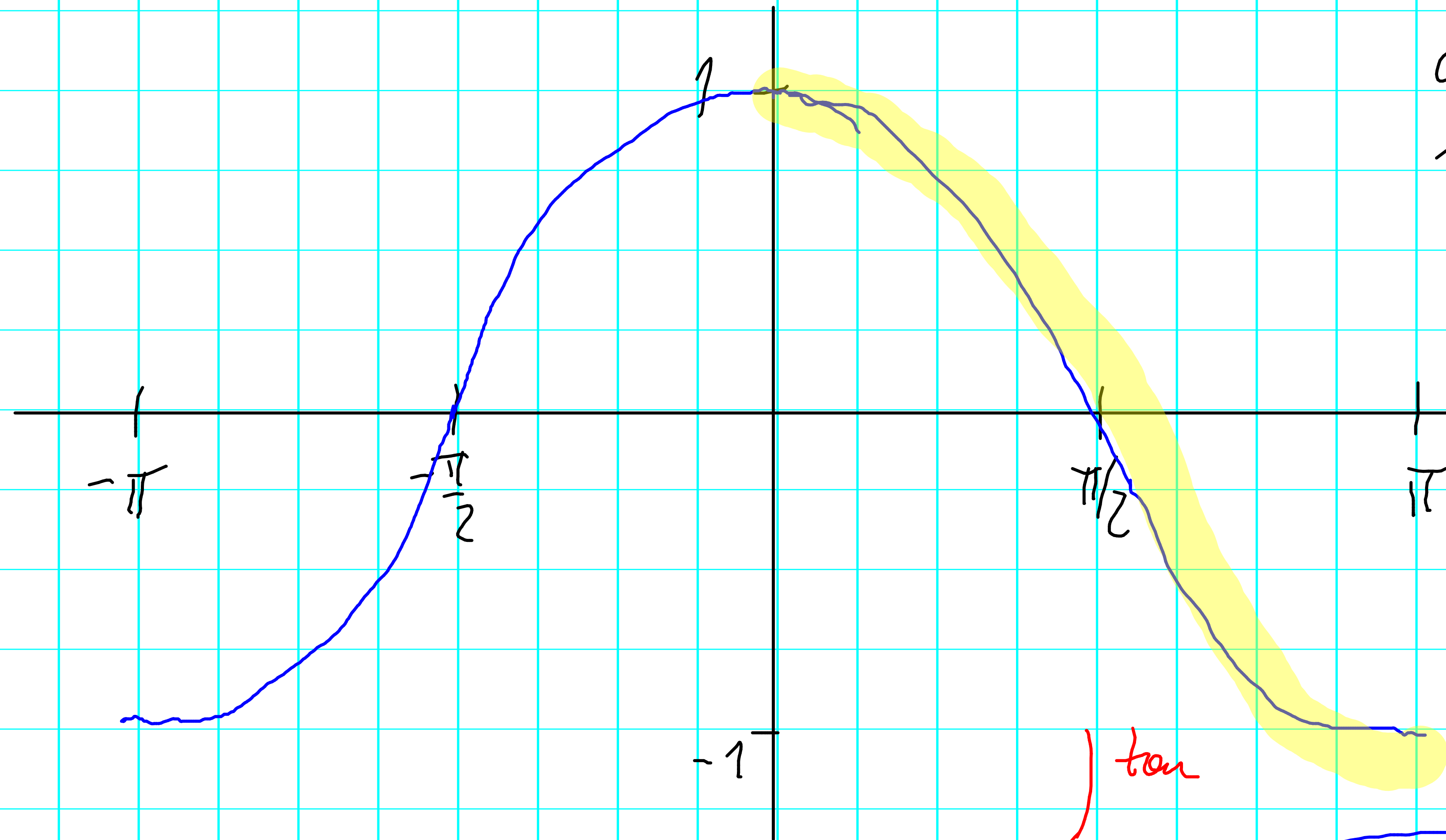
„arcus" = „Bogen"

$\sin \alpha = z$ ← Strecke

↑

Winkel / Bogenlänge

$\Leftrightarrow \quad \alpha = \arcsin z$



$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$

streng monoton fallend,

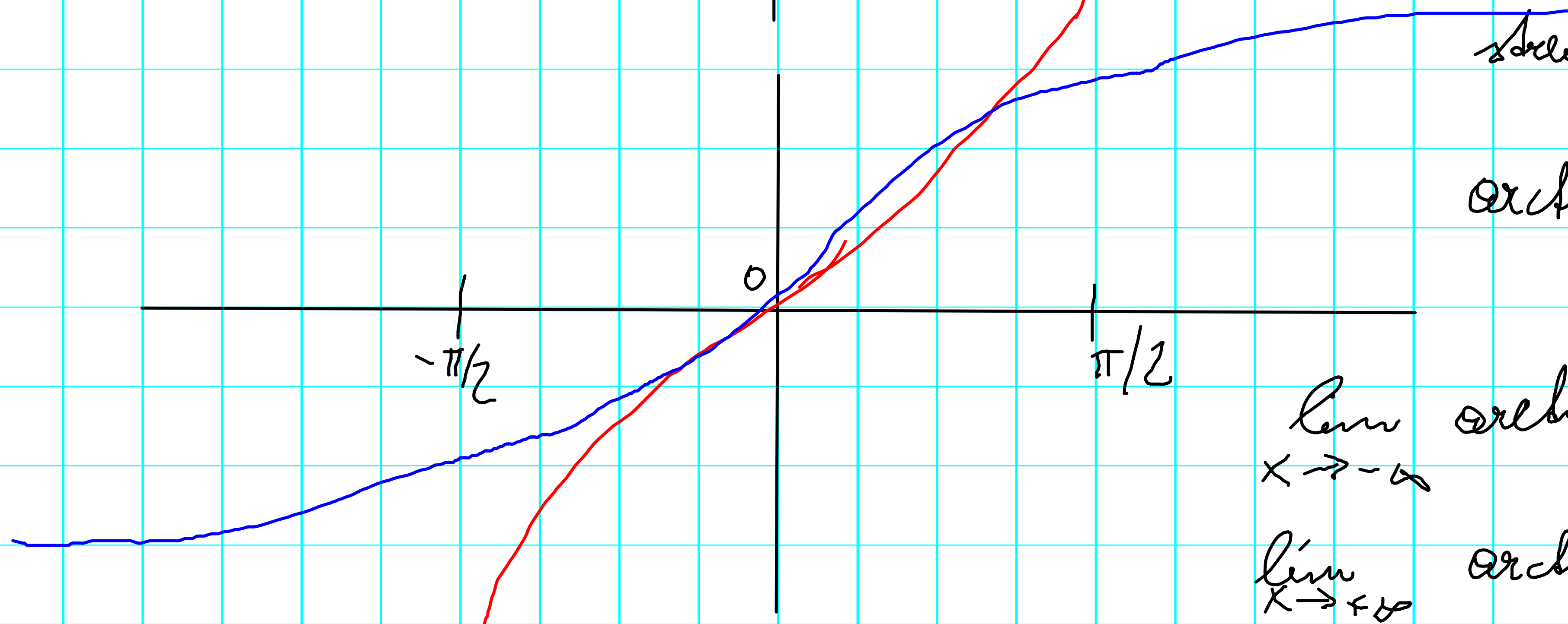
bijektiv

Umkehrfunktion Arcuscosinus

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$

streng monoton w.



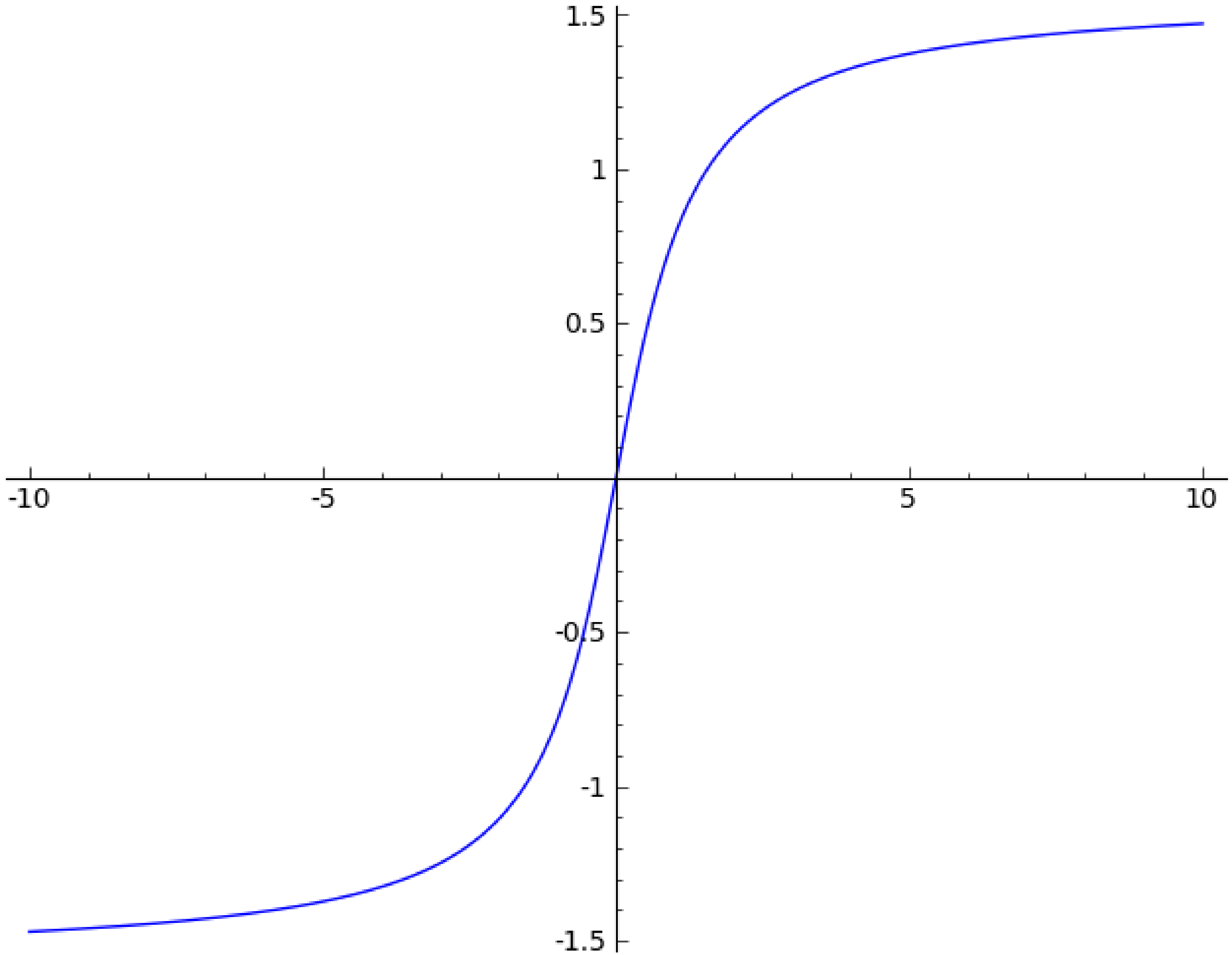
$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

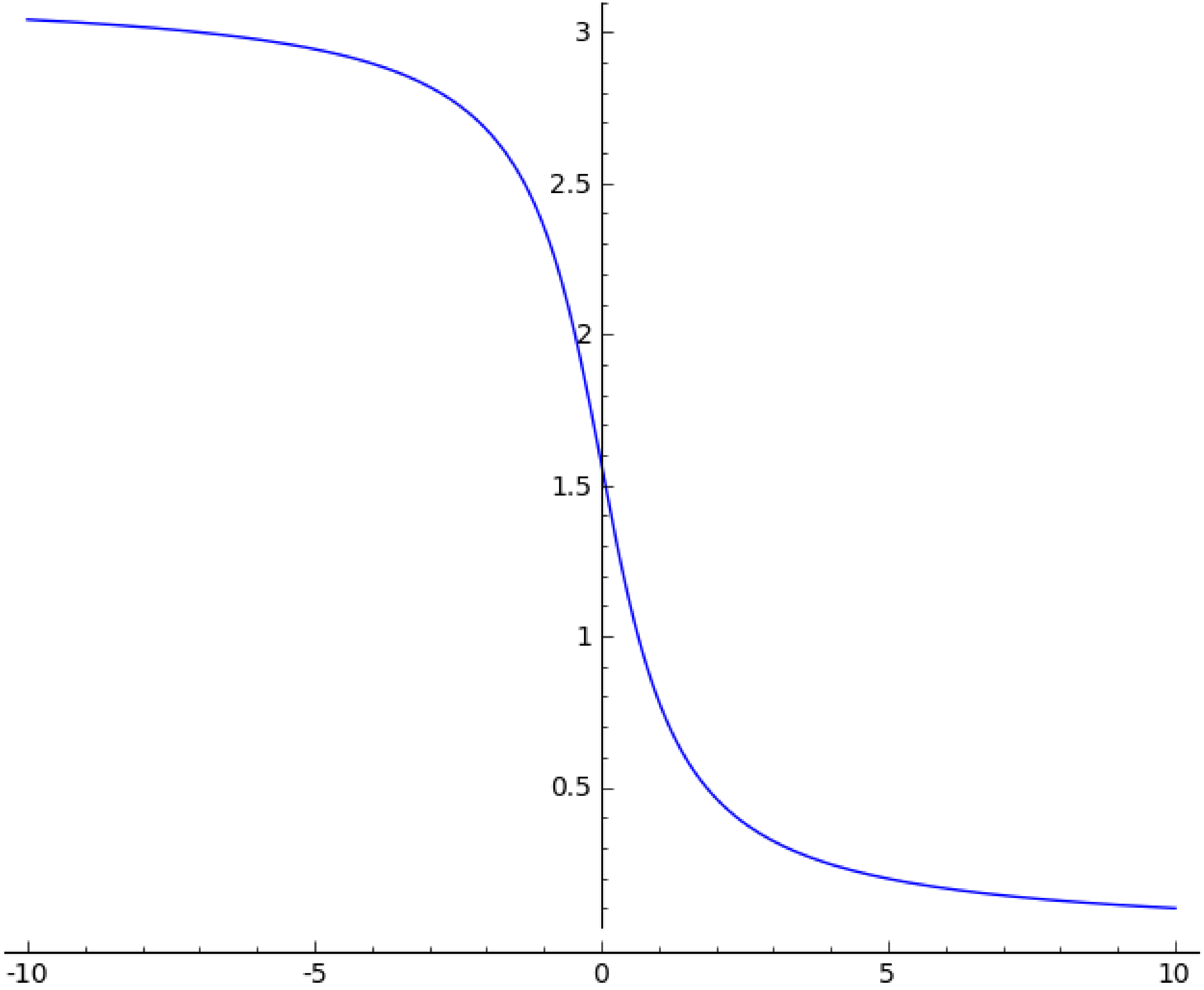
$$\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$\cot: [0, \pi] \to \mathbb{R}$

$\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \to [0, \pi]$



arctan x



arccot x .

29.11.2011

2.5 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Bis jetzt: Funktion $y = f(x)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzw. passende Teilmenge)
aber natürlich hängen manche Größen von mehreren Variablen ab,

Bsp. $pV = RT$ Gasgleichung.

Hier kann z.B. der Druck p als Funktion von Volumen V und Temperatur T gesehen werden, also

$$p(V,T) = \frac{RT}{V}$$

Das wäre eine Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (bzw. passende Def.menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$)

Darstellung: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kann als Fläche über der Grundfläche gesehen werden; $f(x,y)$ sei also die Höhe im Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Zweidimensionale Darstellung durch Isolinien (Kurven, auf denen Funktion konstanten Wert annimmt), z.B. Höhenschichtlinien, Isobaren (konst. Druck), Isothermen (konstante Temperatur usw).

Grenzwerte von Funktionen in mehreren Veränderl.

<u>Definition.</u> Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, und $y_0 \in \mathbb{R}$.
Wir sagen,

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = y_0,$$

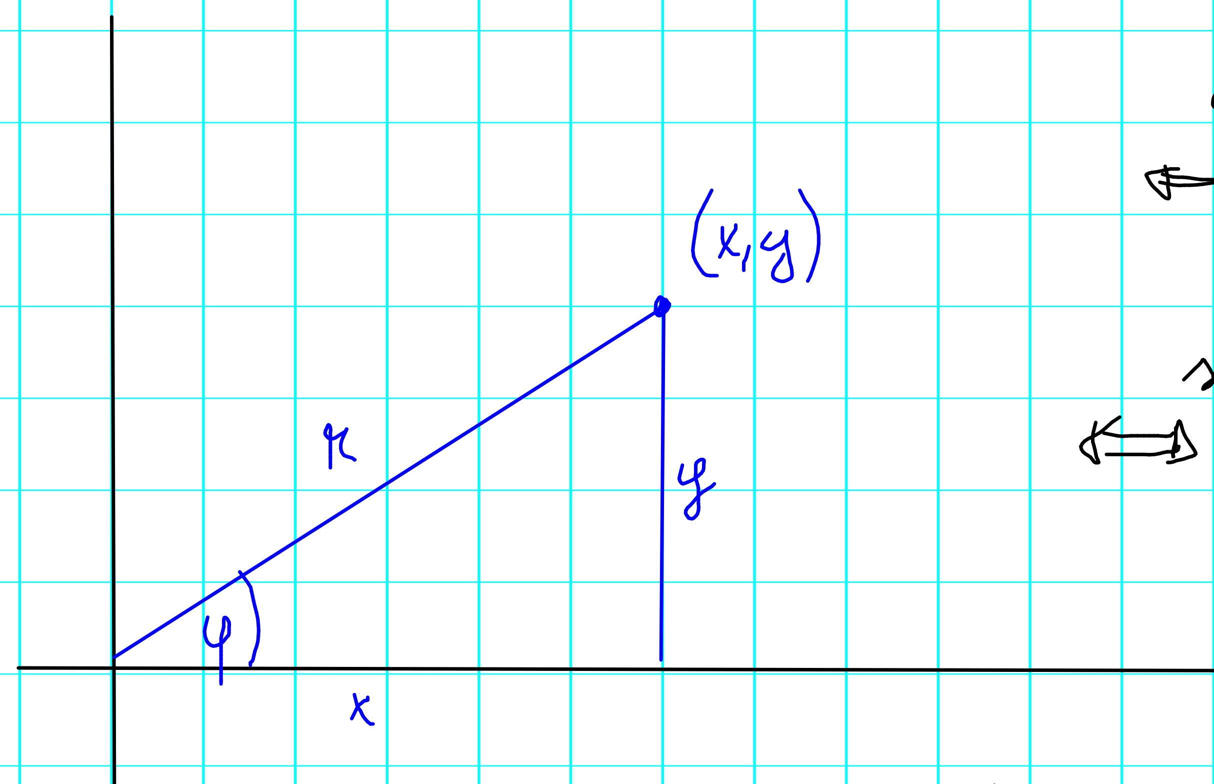
wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $\vec{x} \in D$ mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ gilt, dass $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon$.

<u>Beispiel ?</u> $f: D \to \mathbb{R}$; $\quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

Betrachte Grenzwert $\lim\limits_{\vec{x} \to (0,0)} f(\vec{x}) \quad \left(\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$

Wir führen Polarkoordinaten ein:



$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \iff x = r\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \iff y = r\sin\varphi$$

bzw. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{---} \quad x > 0 \\ \left(\arctan \frac{y}{x}\right) + \frac{\pi}{2} & x < 0,\ y \geq 0 \\ \left(\arctan \frac{y}{x}\right) - \frac{\pi}{2} & x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & x = 0 \quad y > 0 \\ -\pi/2 & x = 0 \quad y < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi \text{ bel.}}} \frac{r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi \text{ bel}}} \frac{r^3(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)}{r^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1}} =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi \text{ bel.}}} \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{r}\cdot \underbrace{\left(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi\right)}_{|\ |\le 2} = 0.$$

$\square$

Definition (Stetigkeit). Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$; $f: D \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D$.

Dann heißt f stetig in $\vec{x}_0$, wenn

$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$ existiert und gleich $f(\vec{x}_0)$

ist.

zu Bsp 2. Die Funktion $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{--- wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{--- wenn } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ist stetig in $(0,0)$, weil lt. obiger Rechnung

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0).$$

Satz. Die Grenzwertsätze (z.B. $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = (\lim_{\vec{x}\to x_0} f(\vec{x})) + (\lim_{\vec{x}\to x_0} g(\vec{x}))$) und die Sätze über Verknüpfung stetiger Funktionen (z.B. Wenn f und g in $\vec{x}_0$ stetig sind, dann auch $f+g$ ---) gelten nach wie vor.

zu Bsp 2. f ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig als Quotient zweier stet. Fn, nur die Ausnahme im Ursprung war zu untersuchen.

Beispiel 3. $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$

Polarkoord. $x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi \text{ beliebig}}} \frac{r^2\cos^2\varphi + r^3\sin^3\varphi}{r^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1})} =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi \text{ beliebig}}} \Big(\cos^2\varphi + \underbrace{\underset{\downarrow\, 0}{r}\, \underbrace{\sin^3\varphi}_{|\,|\le 1}}_{\to 0} \Big)$$

alles zwischen 0 und 1 ist möglich,

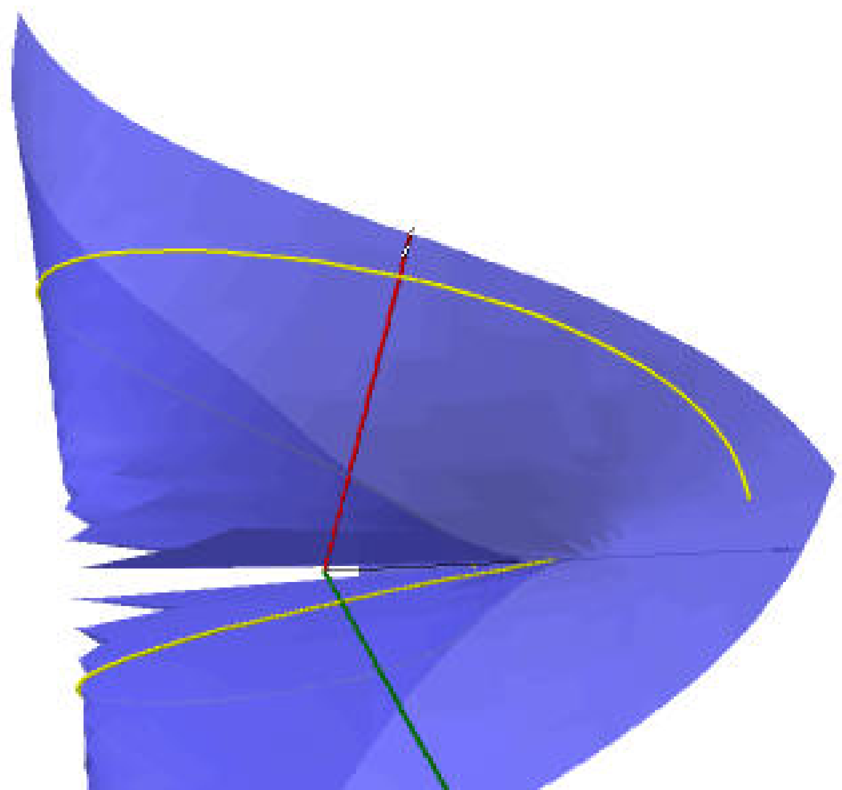
Beispiel 4. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y-1}$ Probleme bei $y=1$.

$$\lim_{(x,y)\to(42,1)} \frac{x^2}{y-1} = \text{"} \frac{42^2}{\pm 0} \text{"}$$ kein Grenzwert

Beispiel 5

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\ \text{bel}}} \frac{\cancel{r}\cos\varphi\ \cancel{r}\sin\varphi}{\cancel{r^2}(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{1})} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\ \text{bel}}} \cos\varphi\sin\varphi$$



hängt vom Winkel ab; kein GW

2.6. Polardarstellung komplexer Zahlen.

Was wir in 2.5 für Vektoren in $\mathbb{R}^2$ kannten, können wir auch für komplexe Zahlen:

$$z = x + iy \qquad x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$$

Polardarst komplexer Zahlen.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$$

Die Polardarstellung ist bei Multiplikation komplexer Zahlen interessant:

Seien
$$z = x + iy \qquad x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$
$$w = u + iv \qquad u = s\cos\psi \qquad v = s\sin\psi$$

$$z \cdot w = (x+iy)(u+iv) = (xu - yv) + i(yu + xv) =$$

$$= r\cos\varphi\, s\cos\psi - r\sin\varphi\, s\sin\psi + i\,(r\sin\varphi\, s\cos\psi + r\cos\varphi\, s\sin\psi)$$

$$= rs\Big(\underbrace{(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi)}_{\cos(\varphi+\psi)} + i\,\underbrace{(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)}_{\sin(\varphi+\psi)}\Big)$$

$$= rs\big(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)\big)$$

Das ist Polardarstellung von zw: Radius rs = Produkt der Radien
Winkel $\varphi+\psi$ = Summe der Winkel.

<u>Satz (Formel von de Moivre)</u> Sei $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt
$$z^n = r^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big),$$

<u>Beispiel</u>. Gesucht: alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 = -27$.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$-27 = 27(\cos\pi + i\sin\pi) = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi)$$

$r^3 = 27 \implies r = 3$

$3\varphi = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} k \qquad k \in \mathbb{Z}.$

also: $\varphi = \frac{\pi}{3}$ oder $\varphi = \pi$ oder $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ oder $\varphi = \frac{7\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$

Somit

$z = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$ oder $z = 3\left(\cos\pi + i \sin\pi\right)$ oder

$z = 3\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right)$

also $z = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ oder $z = -3$ oder $z = 3\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

$\square$

Satz (Wurzeln komplexer Zahlen) Sei $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann sind die n-ten Wurzeln von w (also jene $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = w$) gegeben durch:

$$z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)$$

$$z_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

$$\vdots$$

$$z_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}\right)\right).$$

Insbesondere gibt es n n-te Wurzeln jeder komplexen Zahl $\neq 0$.

$n=4$