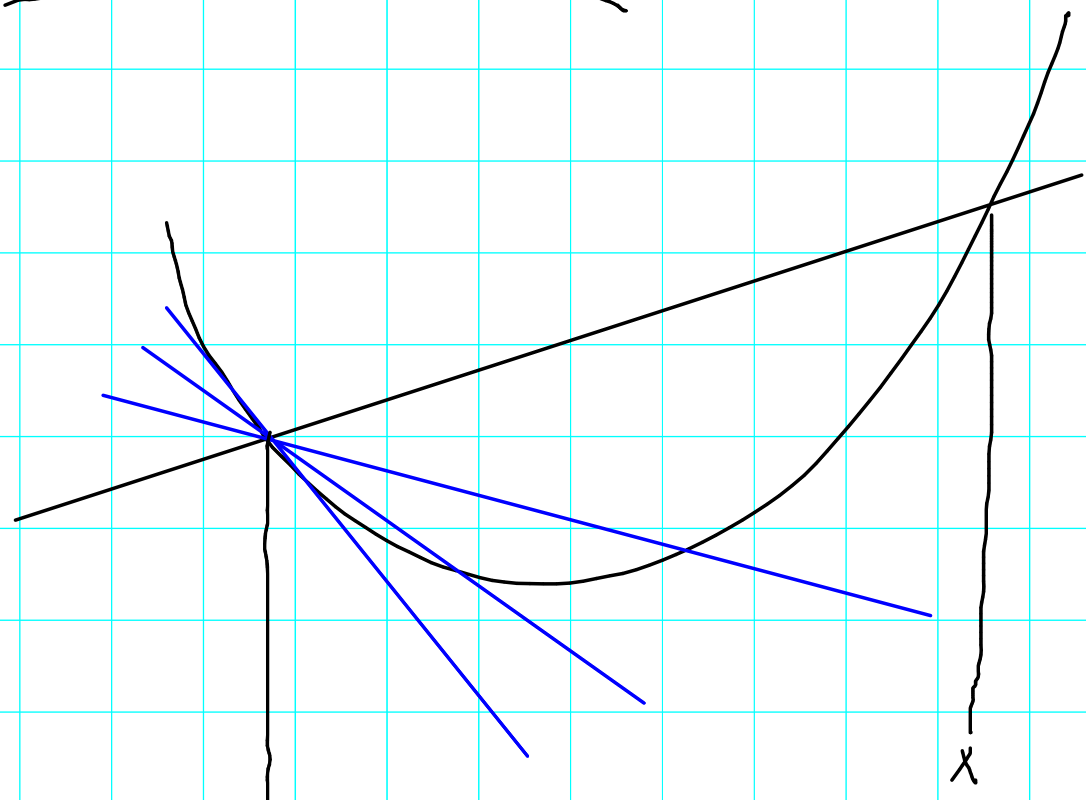
Kapitel 3. Differentialrechnung

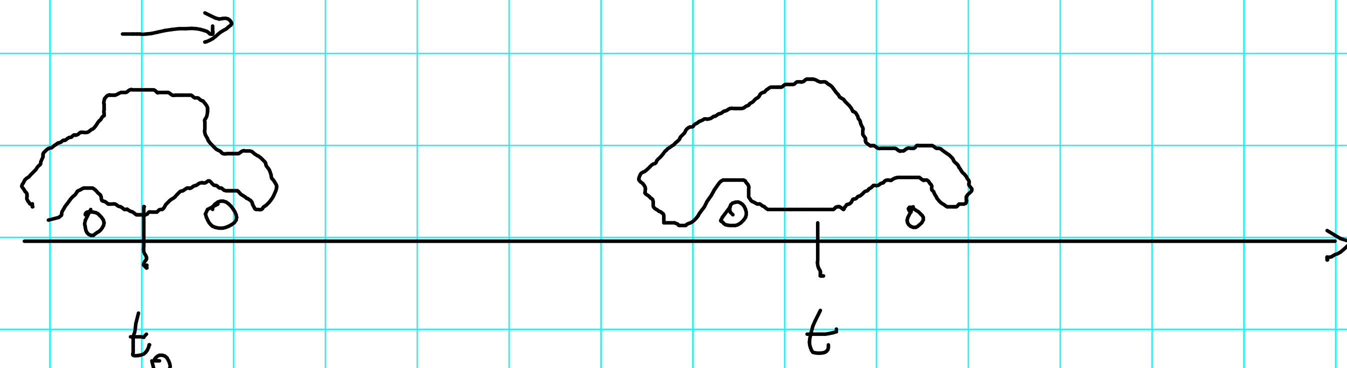
3.1. Definition



Steigungen der Sekante

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Im Grenzwert $x \to x_0$ ergibt sich Steigung der Tangenten



Zum Zeitpunkt t sei Fahrzeug bei Strecken Kilometer $f(t)$.

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

mittlere Geschwindigkeit (section control)

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ Momentangeschwindigkeit.

Definition. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in [a, b]$.

Wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert, so heißt f differenzierbar in x_0;

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

„df nach dx"

heißt die Ableitung von f im Punkt x_0.

6.12., 7.12. vgl. Skriptum

13.12.2011

Weitere Bsp zu de L'Hôpital

Bank 1 ... zahlt 100% Zinsen pro Jahr. $(1+1)$

Bank 2 —— " —— ——
Zinszahlung halbjährlich $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$

Bank 3 — — — 3mal jährlich $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$

$\vdots$

Bank ∞ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Für festes a betrachte

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \text{„}1^\infty\text{"} = \text{unbest. Form}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \exp\left(x \ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\to\infty}\, \underbrace{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}_{\to 0}\right) -$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\to 0}}{\frac{1}{x} \to 0}\right) \overset{\text{del'H.}}{=} \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{a}{1+\underbrace{\frac{a}{x}}_{\to 0}}\right) = \exp(a) = e^a.$$

Für unser Bsp mit der „∞-Bank" $(a=1)$. $e = 2.71\ldots$

Bemerkungen: Neben „$\frac{0}{0}$" und „$\frac{\infty}{\infty}$" kann man durch Umformung andere „unbestimmte Ausdrücke" darauf zurückführen und dann de l'Hospital anwenden.

1) „$0\cdot\infty$" $\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) =$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{oder} \quad = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

2) „$\infty - \infty$", also $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) =$ mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\to 0}}{\underbrace{\frac{1}{f(x)}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{\to 0}} = „\frac{0}{0}" \quad \text{... de l'Hospital ...}$$

3) „1^∞", „0^0", „∞^0" ...

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \exp\big(g(x) \ln f(x)\big) =$$

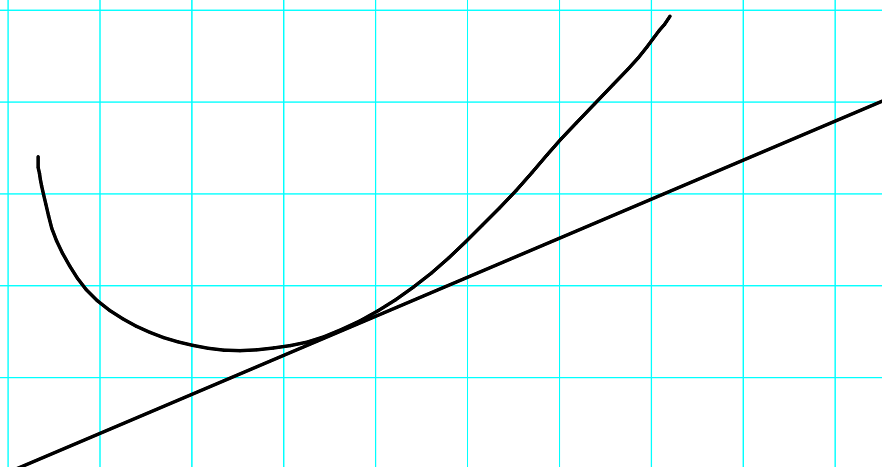
$$= \exp\left(\lim_{x \to x_0} g(x) \ln f(x) \right)$$

wie den weiterbehandeln.

$$\lim \Big(\underbrace{1 + \tfrac{1}{x}}_{\to 1} \Big)^x \neq 1$$

3.5 Taylorreihen

Durch Differentiation können wir Funktion $f(x)$ durch Gerade approximieren (Tangente).



$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0) R_1(x)$$

mit $\lim_{x \to x_0} R_1(x) = 0$.

Können wir besser approximieren, z.B. durch quadratisches Polynom odgl?

Wenn $R_1(x)$ differenzierbar in x_0 ist, können wir R_1 linear approx.:

$$R_1(x) = \overbrace{R_1(x_0)}^{=0} + R_1'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)R_2(x)$$

mit $\lim\limits_{x\to x_0} R_2(x) = 0$.

Setze ein: $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1'(x_0)(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2 R_2(x)$$

Wir wollen $R_1'(x_0)$ durch f ausdrücken:

$$R_1'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x) - \underbrace{R_1(x_0)}_{=0}}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\overset{\to f(x_0)}{f(x)} - f(x_0) - f'(x_0)\overset{\to 0}{(x-x_0)}}{(x-x_0)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x-x_0)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

also: wenn f zweimal db ist, so gilt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2 R_2(x)$$

mit $\lim_{x \to x_0} R_2(x) = 0$.

Das Spiel geht weiter:

$$R_2'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{R_2(x) - \overbrace{R_2(x_0)}^{=0}}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}{(x-x_0)^3} =$$

$$\overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - \frac{f''(x_0)}{\cancel{2}}\cancel{2}(x-x_0)}{3(x-x_0)^2} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{3 \cdot 2 \cdot (x - x_0)} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'''(x)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

Also:

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + (x - x_0)^3 R_3(x)$$

Satz (Taylor) Wenn f an der Stelle x_0 N mal differenzierbar ist, so gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^N R_N(x)$$

mit $\lim_{x \to x_0} R_N(x) = 0$. $\qquad f^{(n)}$ --- n-te Ableitung von f.

Beispiel. 1) $f(x) = \exp(x)$ $\quad f'(x) = \exp(x)$ $\quad f''(x) = \exp(x)$ $\quad f^{(n)}(x) = \exp(x)$

Wähle $x_0 = 0$.

$$f^{(n)}(0) = \exp(0) = 1.$$

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} x^n \qquad + (x-x_0)^N R_N(x)$$

es gilt $\quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2) $f(x) = \sin(x) \qquad x_0 = 0$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0

$$\sin(x) = 0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3$$

$$+ \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 - \frac{1}{7!}x^7$$

$$\cdots$$

3	$-\cos(x)$	-1
4	$\sin(x)$	0
		1
		0
		-1
		0
		1
		0
		-1
		0
		$\vdots$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}}$$

3) $\boxed{\cos(x)} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$

Manchmal kann man Taylorreihen zum Berechnen von Grenzwerten einsetzen:

~~Bsp~~ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \dots}{x} \begin{vmatrix} :x \\ :x \end{vmatrix} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{x^2}{3!} + \dots}{1}$ $\to 0$

$= 1.$

Zur Unterhaltung setzen wir in Exponentialfunktion eine komplexe Zahl ein:

$$\exp(ix) = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) +$$

$$i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) =$$

$$= \cos x + i \sin x$$

(1) $$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Zur weiteren Unterhaltung setze $x = \pi$ in diese Formel ein.

$$\boxed{e^{\pi i} = -1}$$ ... Weihnachtsfeier der Bekannten Zahlen.

Setze $x = -x$ in obere Formel ein:

(2) $$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

(1)+(2): $$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x \Longrightarrow \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

(1)−(2): $$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}.$$

Satz.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \cdots$$

für $-1 < x \leq 1$.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

für $-1 < x < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{\cosh x - 1 - \frac{x^2}{2}} = „\frac{0}{0}" \overset{\text{del'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{\sinh x - x} = „\frac{0}{0}"$$

$$\overset{\text{del'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + x}{\cosh x - 1} = „\frac{0}{0}" \overset{\text{del'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{\sinh x} = „\frac{0}{0}".$$

$$\overset{\text{del'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cosh x} = \frac{0}{1} = 0.$$

<u>oder</u>. via Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^3}{6}}}{\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots\right) - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\underbrace{\overset{0 \leftarrow}{x}{}^{\cancel{5}} \left(\frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} + \dots\right)}_{\to 1/5!}}{\cancel{x^4} \left(\frac{1}{4!} + \frac{x^2}{6!} + \dots\right) \to 1/4!} = 0.$$

Beispiel 6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{13x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} =$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{13x}{(1+x)^{1/2} - (1-x)^{1/2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{13x}{\left(1 + \binom{1/2}{1} x + \binom{1/2}{2} x^2 + \dots\right) - \left(1 + \binom{1/2}{1}(-x) + \binom{1/2}{2}(-x)^2 + \dots\right)}$$

$$\binom{1/2}{1} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2} \qquad \binom{1/2}{2} = \frac{(1/2)(-1/2)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{13x}{\left(\cancel{1} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots\right) - \left(\cancel{1} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{13x}{x \quad + \ldots} \begin{vmatrix} :x \\ :x \end{vmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{13}{1+\underbrace{(\quad)x}_{\to 0}} = 13$$

14.12.2011

3.6. Kurvendiskussion

geg.: Funktion $f(x)$

ges.: Informationen über diese Funktion

- Definitionsbereich.
  (siehe Kap 2)
- Verhalten am Rand des Definitionsbereichs,

z.B. $D = (-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

Lücke

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, stetig ergänzbar in $x=2$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

- Nullstellen. $f(x)=0$. ... löse diese Gleichung.

- lokale Extrema.

<u>Definition.</u> Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Dann heißt x_0 ein lokales Minimum von f, wenn
Maximum

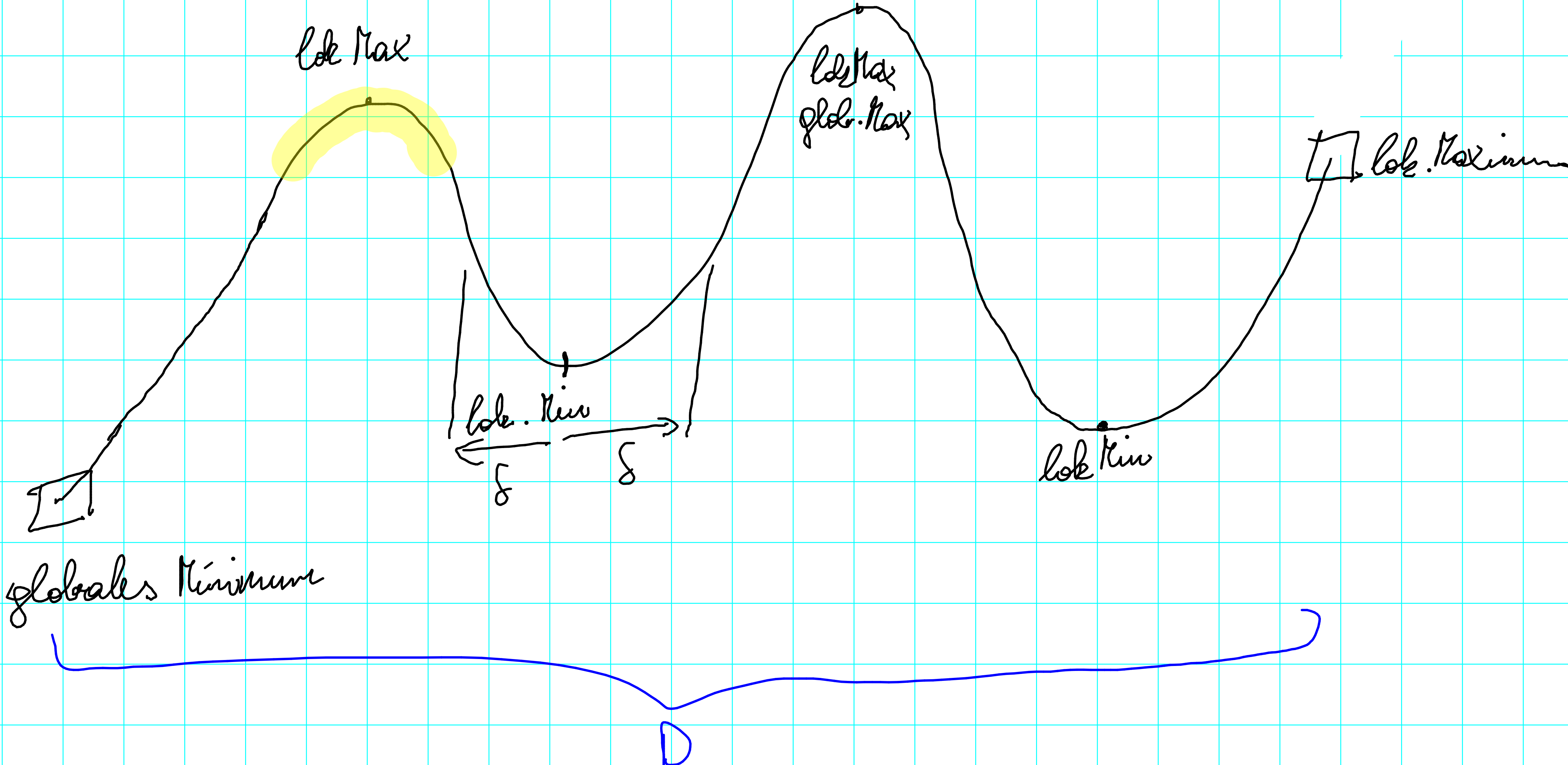
$$f(x_0) \overset{\geq}{\leq} f(x) \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x-x_0|<\delta$$

für ein passendes festes $\delta > 0$ gilt.

<u>Definition</u> Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Dann heißt x_0 ein globales Minimum (Maximum) von f, wenn

$$f(x_0) \overset{\geq}{\leq} f(x) \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt.



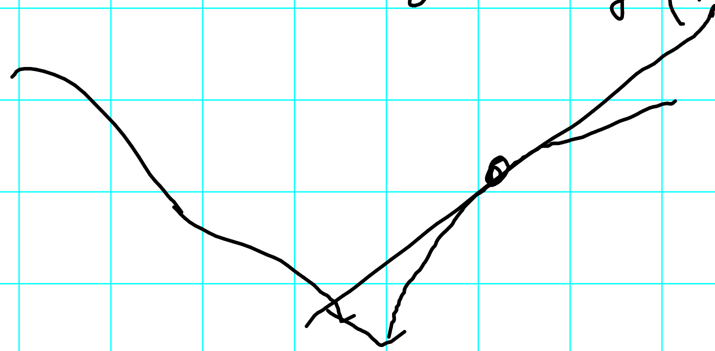
lokales Extremum -- lok. Min oder lok. Maximum

globales Extremum -- glob. Min oder glob. Maximum

Satz. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in D$, f habe an x_0 ein lokales Extremum.
Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

x_0 im Inneren von D

Begründung. Wenn z.B. $f'(x_0) > 0$:

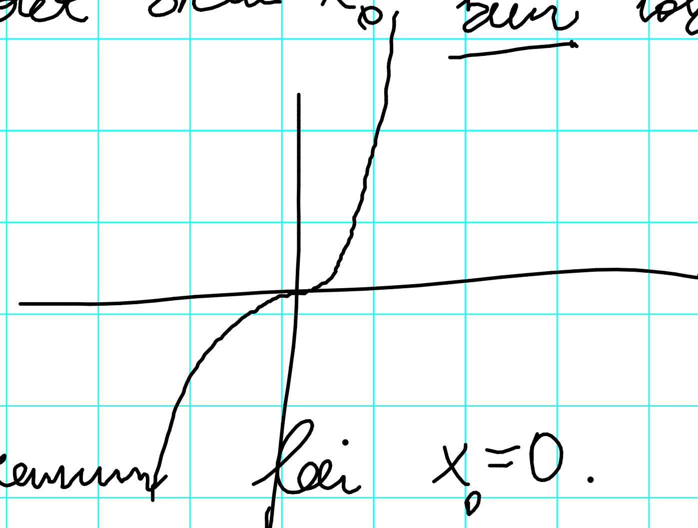


Dann sind $f(x) < f(x_0)$ für $x_0 - \delta < x < x_0$
und $f(x) > f(x_0)$ für $x_0 < x < x_0 + \delta$
Widerspruch zu lok. Extr.

$\square$

Achtung. Umgekehrt muss es nicht gelten: es kann $f'(x_0) = 0$ gelten, obwohl f an der Stelle x_0 <u>kein</u> lok. Extr. besteht.

z.B. $f(x) = x^3$



$f'(x) = 3x^2$

$f'(0) = 0$, aber kein Extremum bei $x_0 = 0$.

Wenn also $f'(x_0) = 0$, so müssen wir genauer untersuchen.

Betrachte Taylor: Annahme: $f''(x_0) > 0$.

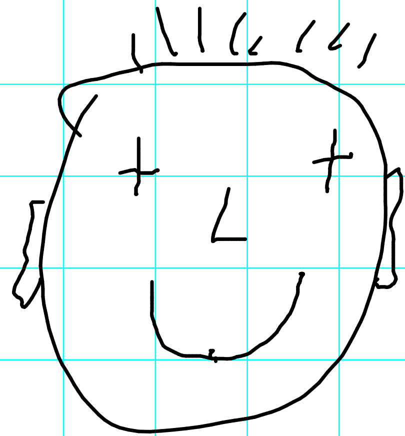
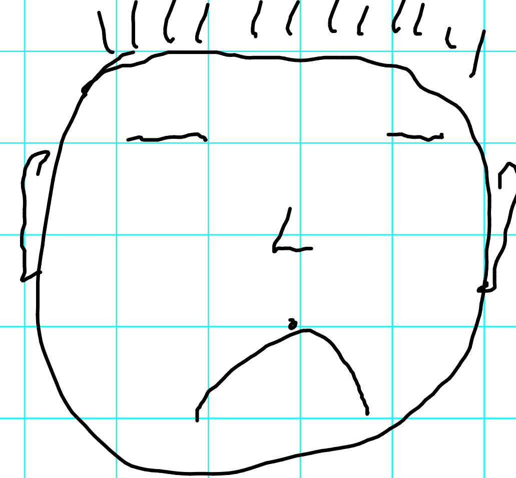
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\text{konst.}} + \underbrace{\underbrace{f'(x_0)}_{=0}(x-x_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}}_{>0}\underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(x-x_0)^2 \cdot R_2(x)}_{\text{klein}}$$

Für $|x - x_0|$ sehr klein gilt somit $f(x) \geq f(x_0)$ ... lok. Min.

Wenn $f''(x_0) < 0$, so folgt nach gleicher Überlegung $f(x) \leq f(x_0)$ ... lok. Max.

<u>Satz</u>. Sei $f: D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, $x_0 \in D$.

1) Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so besitzt f in x_0 ein lok. Minimum.
2) Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so besitzt f in x_0 ein lok. Maximum.

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, so wissen wir noch nichts.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{1}{6}(x - x_0)^3 \left(f'''(x_0) + R_3(x) \right)}$$

Fall 1. $f'''(x_0) > 0$.

> 0 für $x > x_0$

< 0 für $x < x_0$

kein Extr in x_0.

Fall 2 $f'''(x_0) < 0$

kein Extremum in x_0.

Fall 3. $f'''(x_0) = 0$ ... noch immer keine Entscheidung.

Satz. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, $x_0 \in D$, $n \geq 2$.
Es gelte

$$f'(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{aber } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1) Wenn n ungerade ist, so besitzt f in x_0 kein lok. Extr.
2) Wenn n gerade ist und $f^{(n)}(x_0) > 0$, so besitzt f in x_0 ein lokales Minimum.
3) Wenn n gerade ist und $f^{(n)}(x_0) < 0$, so besitzt f in x_0 ein lokales Maximum.

Beispiel 1) $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$.

$f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6$

$n = 3$ ... kein lok. Extr.

2) $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f'''(x) = 24x$, $f''''(x) = 24$

$f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 0$, $f''''(0) = 24$

$n = 4$, $f''''(0) > 0$

$\Rightarrow$ lok. Min in 0.

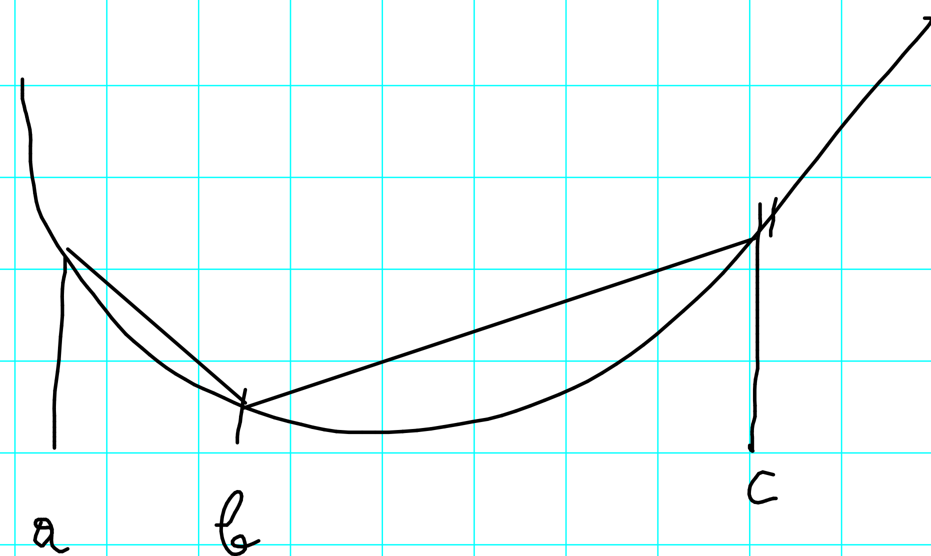
Randpunkte getrennt betrachten!

- globale Extrema: sind lokale Extrema oder am Rand des Def.Bereichs (y-Werte vergleichen).

- Monotonie: f ist auf Intervall m.w., wenn $f'(x) > 0$ auf dem Intervall.
  f ist auf Intervall m.f., wenn $f'(x) < 0$ auf dem Intervall.

Wir lösen also Ungleichungen $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0$.

- Krümmung:



Wenn Steigung auf $[a,b]$ kleiner als Steigung auf $[b,c]$ ist, und das für alle $a < b < c$, so ist f linksgekrümmt (konvex).

(linksgekr.) konvex $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ m. w. $\Longleftrightarrow$ $f''(x) > 0$.

(rechtsgekr.) „konkav" $\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ m. f. $\Longleftrightarrow$ $f''(x) < 0$

- Wendepunkte: „Übergang von linksgekrümmt auf rechtsgekrümmt" (oder umgekehrt)

$\Longleftrightarrow$ Übergang von $f'(x)$ m. w. auf $f'(x)$ m. f. (o. u.)

$\Longleftrightarrow$ f' hat lok. Extremum.

x_0 Wendepunkt $\Longleftrightarrow$ f' hat lok. Extremum in x_0

$\Longrightarrow$ $f''(x_0) = 0$

$f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ $\Longrightarrow$ Wendepunkt

$f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f''''(x_0) \neq 0$ $\Longrightarrow$ kein Wendepunkt

$\vdots$

Definition. Ein Wendepunkt x_0, in dem $f'(x_0)=0$ gilt, heißt Sattelpunkt.

Beispiel. $f(x) = e^{-x/6}(x^2 - 12x + 72)$.

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$
- Verhalten am Rand des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{-x/6}}_{\to 0} \underbrace{(x^2-12x+72)}_{\to\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-12x+72}{e^{x/6}} = \quad „\frac{\infty}{\infty}“$$

$$\overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x-12}{\frac{1}{6}e^{x/6}} = \quad „\frac{\infty}{\infty}“$$

$$\overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\frac{1}{36}e^{x/6}} = 0$$

$$\underline{\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{e^{-x/6}}_{\to+\infty} \underbrace{(x^2-12x+72)}_{\to+\infty} = +\infty$$

$$\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

- <u>Nullstellen</u>. $f(x) = 0$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{e^{-x/6}}_{\neq 0}(x^2-12x+72) = 0 \Longleftrightarrow x^2-12x+72=0.$$

$$x = 6 \pm \sqrt{36-72}$$ <u>keine NSt</u>

- <u>Extrema</u>.

$$f(x) = e^{-x/6}(x^2-12x+72)$$

$$f'(x) = e^{-x/6}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(x^2-12x+72) + e^{-x/6}(2x-12) =$$

$$= -\frac{e^{-x/6}}{6}\left(x^2-12x+72-12x+72\right)$$

$$= -\frac{e^{-x/6}}{6}\left(x^2 - 24x + 144\right)$$

$$f''(x) = \frac{e^{-x/6}}{36}\left(x^2 - 24x + 144 - 6(2x-24)\right) =$$

$$= \frac{e^{-x/6}}{36}\left(x^2 - 36x + 288\right)$$

$$f'''(x) = -\frac{e^{-x/6}}{216}\left(x^2 - 36x + 288 - 6(2x-36)\right) =$$

$$= -\frac{e^{-x/6}}{216}\left(x^2 - 48x + 504\right)$$

Kandidaten für lok. Extrema: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{e^{-x/6}}{6}}_{\neq 0}\left(x^2 - 24x + 144\right) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 24x + 144 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-12)^2 = 0$$

$x = 12$ Doppellösung.

Wenn lokales Extremum, dann in $x = 12$.

$$f''(x) = \frac{e^{-x/6}}{36}\left(x^2 - 36x + 288\right)$$

$$f''(12) = \frac{e^{-2}}{36}\left(144 - 3\cdot 144 + 2\cdot 144\right) = 0$$

oje

$$f'''(x) = \frac{-e^{-x/6}}{216}\left(x^2 - 48x + 504\right)$$

$$f'''(12) = -\frac{e^{-2}}{216}\left(\underbrace{144 - 4\cdot 144 + 504}_{>0}\right) < 0 .$$

kein Extremum

- globale Extrema: keine (kein Rand, kein lok. Extremum).

- Monotonie: m. f. $\iff f'(x) \leq 0$

$$\iff -\frac{e^{-x/6}}{6}\left(x^2 - 24x + 144\right) \leq 0$$

$$\iff \underbrace{-\underbrace{\frac{e^{-x/6}}{6}}_{\geq 0}\underbrace{(x-12)^2}_{\geq 0}}_{\leq 0} \leq 0$$

monoton fallend auf $\mathbb{R}$.

- <u>Krümmung</u>. konvex $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{e^{-x/6}}{36}}_{>0} (x^2 - 36x + 288) \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 36x + 288 \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x - 24)(x - 12) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 24 \text{ oder } x \leq 12$$

$(-\infty, 12)$ ... konvex (linksgekrümmt)
$(12, 24)$ ... konkav (rechtsgekrümmt)
$(24, \infty)$ ... konvex (linksgekrümmt)

- <u>Wendepunkte</u>. Wechsel von links/rechts oder umgekehrt:
bei $x = 12$ und $x = 24$.

oder

$$f''(x)=0 \iff \frac{e^{-x/6}}{36}(x-24)(x-12)=0$$

$$\iff x=24\ ,\ x=12$$ Kandidaten für WP.

$$f'''(12)<0 \qquad f'''(24)=-\frac{e^{-4}}{216}\left(24^2-48\cdot 24+504\right)<0$$

$$4\cdot 144-8\cdot 144+504$$

Wendepunkte bei $x=24$, $x=12$.

Wendetangenten:

z.B. $x=12$ $\qquad f(12)=e^{-2}\left(12^2-12\cdot 12+72\right)=72e^{-2}$.

Tangente $\quad y=72e^{-2}+\underbrace{f'(12)}_{=0}(x-12) \qquad \underline{y=72e^{-2}}$

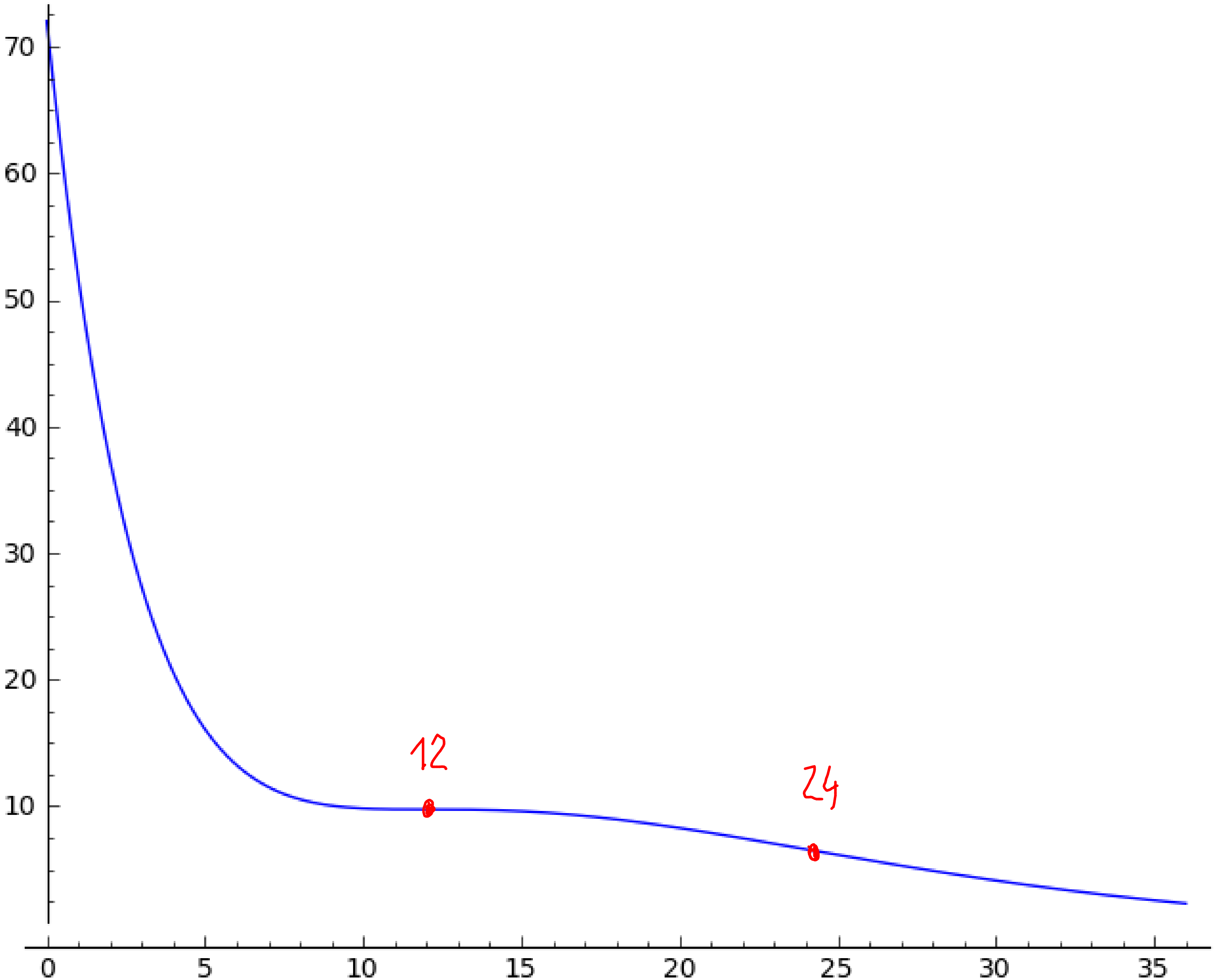
Sattelpunkt.

Wendetangente bei $x=24$

$$f(24)=e^{-4}\left(4\cdot 144-2\cdot 144+\tfrac{1}{2}\,144\right)=360e^{-4}.$$

$$f'(24) = \frac{-e^{-4}}{6} \quad \Big| \cdot 144 = -24e^{-4}$$

$$\underline{y = 360e^{-4} - 24e^{-4}(x-24)}$$ Wendetangente in 24.


70
60
50
40
30
20
10
0
5
10
15
20
25
30
35
12
24

3.3. Differentiation im $\mathbb{R}^n$.

im eindimensionalen:

$$\underbrace{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{Tangente}} + \underbrace{(x-x_0)\,\varepsilon(x)}_{\text{Fehler}} \qquad \text{mit } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in U$. Dann heißt f (~~total~~) differenzierbar in $\vec{x}_0$, wenn

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + \|\vec{x}-\vec{x}_0\| \cdot \varepsilon(\vec{x})$$

für passende Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$, eine Funktion ε mit

$$\lim_{\vec{x} \to x_0} \varepsilon(\vec{x}) = 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

<u>Bemerkung</u>. Schreibe $z_0 = f(\vec{x}_0)$, lasse Fehler weg, und erhalte

$$f(\vec{x}) \approx z_0 + a(x-x_0) + b(y-y_0)$$

Die Ebene

$$z = z_0 + a(x-x_0) + b(y-y_0)$$

ist die Tangentialebene an die Funktion im Punkt $(\vec{x}_0, f(\vec{x}_0))$

Bringe Ebene auf Normalform:

$$ax + by + (-1)z = ax_0 + by_0 - z_0$$

Normalvektor der Tangentialebene:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkt (x_0, y_0, z_0).

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^n$ funktioniert es genauso:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \langle \vec{a}, (\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot \varepsilon(\vec{x})$$

für passenden konstanten Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$,
$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \varepsilon(\vec{x}) = 0.$

Frage: Wie erhält man die Konstanten a und b?
Haben die eine Bedeutung (abgesehen davon, dass sie im Normalvektor der Tangentialebene stehen?)

Führe dafür Konzept der partiellen Ableitung ein:

Definition Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in U$.
Wenn

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

(y_0 fest
x als Variable
differenzieren)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

(„normal' nach x und betrachte y als Konstante)

existieren, so heißt f partiell differenzierbar in $\vec{x}_0$; $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw $\frac{\partial f}{\partial y}$ heißen die partiellen Ableitungen nach x bzw y im Punkt $\vec{x}_0$.

Wie passen die beiden Begriffe (total) diffbar und partiell differenzierbar zusammen?

Sei f total diffbar in $\vec{x}_0$, berechne $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)$:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \, \varepsilon(\vec{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\cancel{f(x_0,y_0)} + a(\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}) + \cancel{b(y_0-y_0)} + \underbrace{\left\|\begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix}\right\|}_{|h|} \varepsilon(x_0+h, y_0) - \cancel{f(x_0,y_0)} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ah + |h|\,\varepsilon(x_0+h, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(a + \underbrace{\underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\pm 1} \underbrace{\varepsilon(x_0+h, y_0)}_{\to 0}}_{\to 0} \right) = a.$$

__Satz.__ Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in U$. Wenn f in $\vec{x}_0$ (total) differenzierbar ist

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + \|\vec{x}-\vec{x}_0\|\,\varepsilon(\vec{x}),$$

so ist f in $\vec{x}_0$ partiell differenzierbar und es gilt

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \qquad b = \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0)$$

Der Normalvektor der Tangentialebene ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Umkehrung gilt nur unter zusätzlichen Voraussetzungen:

Satz. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in U$. Wenn f in allen Punkten von U partiell differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetige Funktionen auf U sind, so ist f in $\vec{x}_0$ total differenzierbar.

Beispiel.

$$p(V,T) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

a, b, R Konstante

V, T Variablen.

$$\frac{\partial p}{\partial V} = RT\left(-\frac{1}{(V-b)^2}\right) + \frac{2a}{V^3} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}.$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V-b} \cdot 1$$

Für $V > 0$ $V \neq b$ sind part. Abl. stetig, also liegt totale Differenzierbarkeit vor.

$$p(V,T) \approx p(V_0, T_0) + \left(-\frac{RT_0}{(V_0-b)^2} + \frac{2a}{V_0^3}\right)(V-V_0) + \frac{R}{V_0-b}(T-T_0)$$

<u>Notation</u>. Statt $\frac{\partial f}{\partial x}$ schreibt man auch gerne f_x

oder (v.a. in Thermodynamik) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$

<u>Definition</u>. Sei $f: U \to \mathbb{R}$ für ein $U \subseteq \mathbb{R}^2$. $f = f(x,y)$

Der <u>Gradient von f</u> ist als

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

definiert. \ „Nabla-Operator"

Bemerkung: Der Gradient ist ein Zeilenvektor, weil es nachher so praktischer ist.

<u>Definition</u> (Totales Differential) Sei $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ total diffbar.
Definiere das totale Differential als

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

[vgl.:

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{y}_0)(y - y_0)$$

<u>Definition (Richtungsableitung)</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$; $\vec{x}_0 \in U$.
Sei $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ normiert, also $\|\vec{r}\| = 1$
Definiere die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} := \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{r}) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

<u>Bemerkung.</u> Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ bzw $\frac{\partial f}{\partial y}$ entsprechen den Richtungsableitungen nach $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ bzw $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Wir versuchen Richtungsableitung durch partiellen Ableitungen auszudrücken (wenn f total diffbar ist):

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}, (\vec{x} - \vec{x}_0) \right\rangle + \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \cdot \varepsilon(\vec{x})$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\cancel{f(\vec{x}_0)} + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}, h \cdot \vec{r} \right\rangle + \|h \cdot \vec{r}\| \, \varepsilon(\vec{x}_0 + h\vec{r}) - \cancel{f(\vec{x}_0)} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}, \vec{r} \right\rangle + \underbrace{\frac{|h|}{h}}_{\pm 1} \cdot \|\vec{r}\| \, \underbrace{\varepsilon(\vec{x}_0 + h\vec{r})}_{\to 0} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}, \vec{r} \right\rangle = \left\langle (\operatorname{grad} f)^{T}, \vec{r} \right\rangle$$

„transponiert": mache Spaltenvektor aus Zeilenvektor oder umgekehrt.

<u>Beispiel</u>: $f(x,y) = x^2 + 5y^2 + 2xy$

ges. Richtungsableitung im Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in Richtung $\vec{r} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

- $\|\vec{r}\| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$ ✓

  Die Richtung hat ihren Namen verdient, wir können mit $\vec{r}$ weiterrechnen.

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8$

- $\frac{\partial f}{\partial y} = 10y + 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 30 + 2 = 32$

- $\operatorname{grad} f \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 32\end{pmatrix}$

- $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \left\langle \begin{pmatrix}8\\32\end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{5}\left(24 + 128\right) = \frac{152}{5} = 30.4$

$\square$

Betrachte noch einmal Formel

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \left\langle (\operatorname{grad} f)^T, \vec{r} \right\rangle.$$

Sei φ der Winkel zwischen $(\operatorname{grad} f)$ und $\vec{r}$.

$$\cos\varphi = \frac{\left\langle (\operatorname{grad} f)^T, \vec{r} \right\rangle}{\|\operatorname{grad} f\| \underbrace{\|\vec{r}\|}_{=1}},$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \left\langle (\operatorname{grad} f)^T, \vec{r} \right\rangle = \|\operatorname{grad} f\| \cdot \cos\varphi .$$

größte Richtungsableitung $\Longleftrightarrow$ $\cos\varphi = 1$ $\Longleftrightarrow$ $\varphi = 0°$ $\Longleftrightarrow$ $\vec{r}$ in Richtung des Gradienten

kleinste Richtungsableitung $\Longleftrightarrow$ $\cos\varphi = -1$ $\Longleftrightarrow$ $\varphi = 180°$ $\Longleftrightarrow$ $\vec{r}$ in Richtung des negativen Gradienten

Richtungsableitung $= 0$ $\Longleftrightarrow$ $\cos\varphi = 0$ $\Longleftrightarrow$ $\varphi = 90°$ oder $270°$

$\Longleftrightarrow$ $\vec{r}$ normal auf Gradienten.

<u>Somit</u>: Der Gradient gibt die Richtung des stärksten Anstiegs an.

Funktion von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$.

Definition. Sei $\vec{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, \text{ wobei } \quad \begin{array}{l} f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \vdots \\ f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}. \end{array}$$

$\vec{f}$ heißt total differenzierbar in $\vec{x}_0$, wenn alle $f_1, \dots, f_m$ total differenzierbar in $\vec{x}_0$ sind.

$$J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

heißt die Jacobi-Matrix von $\vec{f}$.

Beispiel. $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, Variablen (r, φ)

$$\vec{f}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$ (Polarkoordinaten).

$$J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

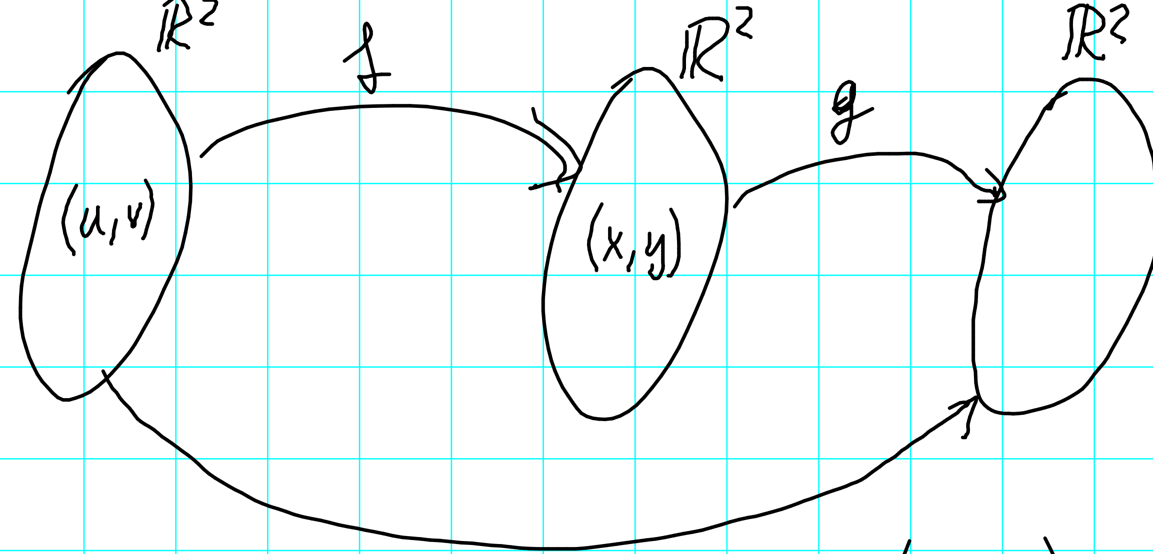
Hier schreiben wir $\vec{f} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$J_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix}$$

11. 1. 2012

Kettenregel

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



$$h(u,v) = g(f(u,v))$$

Frage: wie sehen Ableitungen von h nach u und v aus?

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}\,dx + \frac{\partial g}{\partial y}\,dy$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv \qquad f = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

also komponentenweise:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv$$

Einsetzen:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\right) + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\right) =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\,dv + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\,dv =$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv.$$

also:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}}$$

nach jeder „Zwischenvariable" „äußere Ableitung" × innere Ableitung; Ergebnisse zusammenzählen.

Beispiel 1. $g(x,y) = x^2 + y^2$ $\qquad x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

Variante 1: mit Kettenregel, ohne Denken

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} =$$

$$= 2x \cdot \cos\varphi + 2y \cdot \sin\varphi = 2r\cos^2\varphi + 2r\sin^2\varphi = 2r$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} =$$

$$= 2x \cdot (-r\sin\varphi) + 2y \cdot r\cos\varphi = -2r^2\cos\varphi\sin\varphi + 2r^2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

<u>Variante 2</u> mit Denken:

$$g(r,\varphi) = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \qquad \frac{\partial g}{\partial r} = 2r \quad \frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$$

<u>Beispiel 2</u> Wenn eine der Funktionen unbekannt ist, wird es schon spannender:

$$g(x,y) \qquad \begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

Wir möchten den sog. Laplace-Operator

$$\Delta g := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = g_{xx} + g_{yy}$$

in Polarkoordinaten darstellen.

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$g_x = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \text{Korrektur}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{r^2}}$$

$$= \cos\varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \dots = \sin\varphi$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{-r\sin\varphi}{r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\varphi}{r^2} = \frac{\cos\varphi}{r}.$$

Also: $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r}.$

Soit:

$$g_x = g_r \cdot \cos\varphi + g_\varphi \left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)$$

$$g_y = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} = g_r \sin\varphi + g_\varphi \frac{\cos\varphi}{r}.$$

$$g_{xx} = \frac{\partial g_x}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g_x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= \left(g_{rr}\cos\varphi + g_{\varphi r}\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) + g_\varphi\left(\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\right)\cos\varphi +$$

$$+ \left(g_{r\varphi}\cos\varphi - g_r \sin\varphi + g_{\varphi\varphi}\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) + g_\varphi\left(-\frac{\cos\varphi}{r}\right)\right)\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right)$$

$$g_{yy} = \frac{\partial g_y}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} =$$

$$= \left(g_{rr}\sin\varphi + g_{\varphi r}\frac{\cos\varphi}{r} - g_\varphi\left(\frac{\cos\varphi}{r^2}\right)\right)\sin\varphi$$

$$+ \left(g_{r\varphi}\sin\varphi + g_r\cos\varphi + g_{\varphi\varphi}\frac{\cos\varphi}{r} - g_\varphi\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\cos\varphi}{r}$$

$$\Delta g := g_{xx} + g_{yy} = g_{rr}\overbrace{\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)}^{1} + g_{\varphi r}\overbrace{\left(-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r}\right)}^{0} +$$

$$g_{r\varphi}\underbrace{\left(-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}\right)}_{0} + g_{\varphi\varphi}\left(\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\right) + g_\varphi\underbrace{\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} - 2\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}\right)}_{0}$$

$$+ g_r\left(\frac{\sin^2\varphi}{r} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\right) =$$

$$= g_{rr} + \frac{1}{r^2}g_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}g_r$$

$$g_{xx} + g_{yy} = g_{rr} + \frac{1}{r}g_r + \frac{1}{r^2}g_{\varphi\varphi}$$

Satz von Schwarz Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y)$, die zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ seien existent und stetig.

Dann gilt
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

(also die Reihenfolge der Differentiation ist egal.)

3.7. Notwendige Bedingungen für Extrema im $\mathbb{R}^d$

Sei $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Suche lokale Minima bzw. Maxima.

Jedenfalls muss in einem lok. Extremum die Tangentialebene horizontal sein, d.h. der Normalvektor muss parallel zur z-Achse sein.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

also: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, also $\operatorname{grad} f = \vec{0}$.

<u>Beispiel.</u> $f(x,y) = x^2 - 2xy + 10y^2 - 20x + 2y + 2121$

Wo können lok. Extrema liegen?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y - 20 \overset{!}{=} 0 \iff x = y + 10$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 20y + 2 \overset{!}{=} 0$$

Einsetzen in II. Glg: $-2(y+10) + 20y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 18y - 18 = 0 \Leftrightarrow \underline{y = 1}$

$\underline{x = 11}$

Wenn es lok. Extremum gibt, dann in $(x,y) = (11,1)$.

$f(11,1) = 121 - 22 + 10 - 220 + 2 + 2121 = \underline{2012}$

Mit den hier verfügbaren Mitteln können wir nicht entscheiden, ob in $(11,1)$ tatsächlich ein Minimum, ein Maximum oder keins von beiden vorliegt.

(Grafik legt Annahme nahe, dass es sich um lok. Min. handelt).

Rechnerische Entscheidung: vgl Sommersemester.

<u>Definition</u>. Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ein Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

heißt „stationärer Punkt" von f.

<u>Also</u>: lok. Extr. sind immer stationäre Punkte,
aber stationäre Punkte können auch Sattelpunkte sein ...