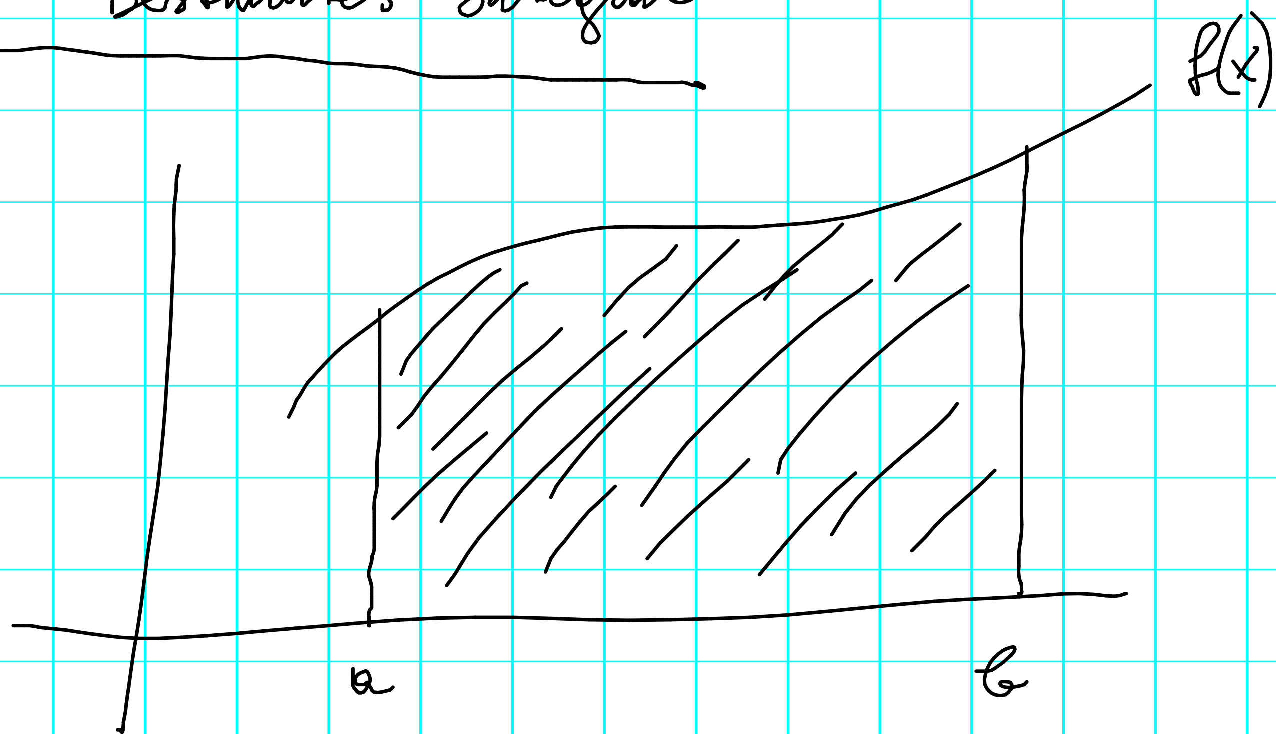
Kap. 4. Integration

4.1. Bestimmtes Integral



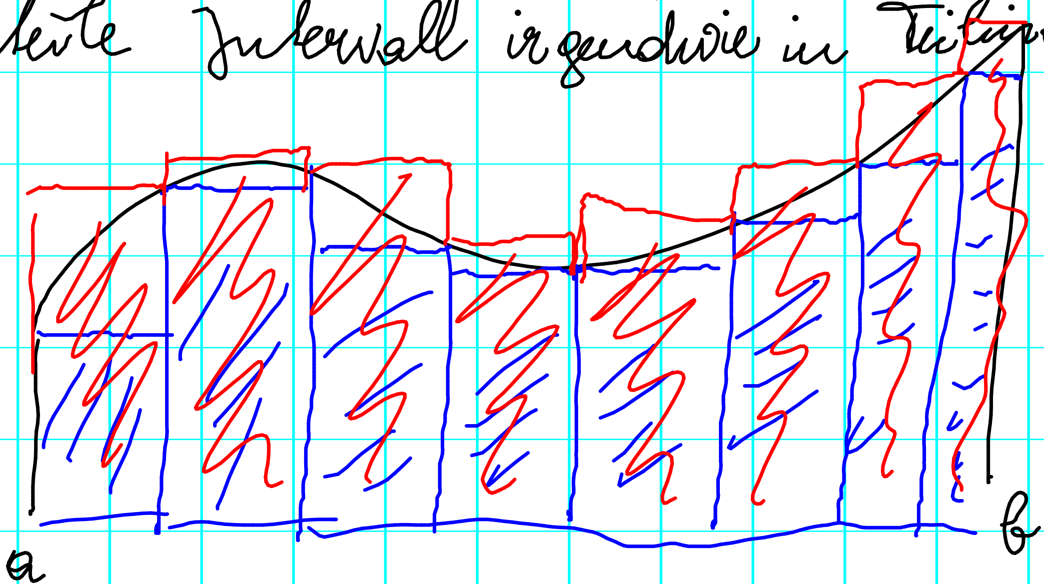
<u>Definition</u>. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

sei der orientierte Flächeninhalt unter der Kurve $f(x)$ und über der x-Achse, zwischen $x = a$ und $x = b$.

<u>orientiert</u> meint: • Wenn Kurve unter x-Achse, dann ist orientierte Fläche negativ
• Wenn $a > b$, so Fläche auch negativ.

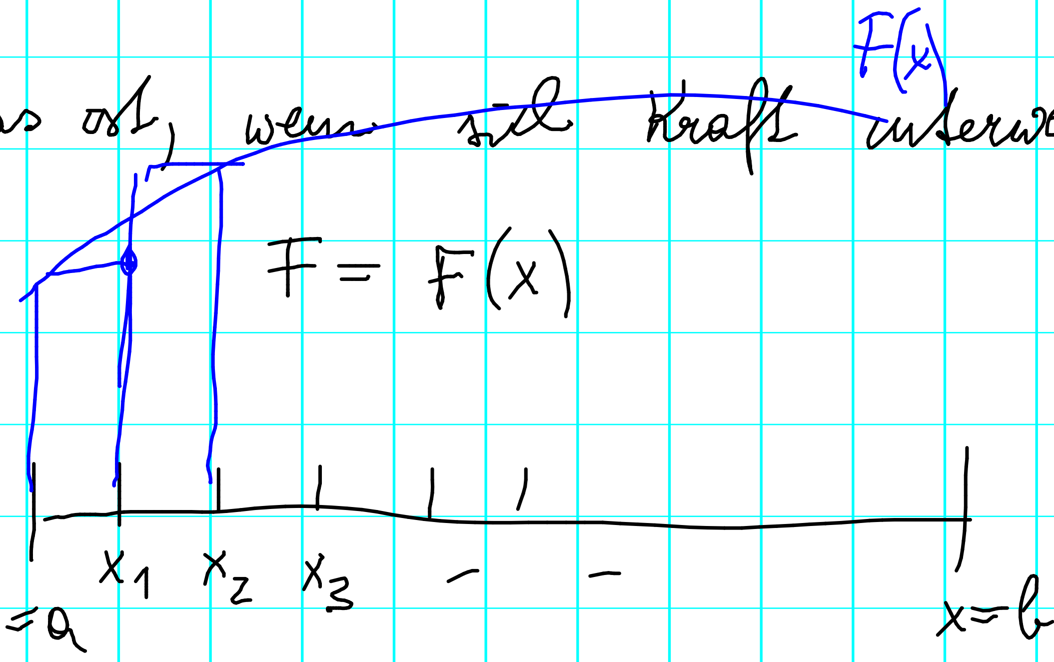
(Eigentlich muss man „Flächeninhalt" sauberer definieren
zerteile Intervall irgendwie in Teilintervalle



Wenn bei „Verfeinerung" der Zerlegung die Untersummen und die Obersummen gegen einen gemeinsamen Wert konvergieren, so heißt Funktion integrierbar; der gem. Grenzwert ist der Flächeninhalt).

Beispiel. physikalische Arbeit: $W = F \cdot s$ „Arbeit = Kraft × Weg"

Was ist, wenn die Kraft unterwegs ändert?



$F = F(x)$

Approximiere durch

$$F(x_1)\underbrace{(x_1 - x_0)}_{\Delta x} + F(x_2)\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\Delta x} + \ldots$$

das ist also das gleiche Problem wie bei Flächenberechnung

$$W = \int_a^b F(x)\,dx.$$

$$\sum F(x_i)\,\Delta x_i$$

Rechenregeln.

1) $$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2) $$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

„Linearität des Integrals"

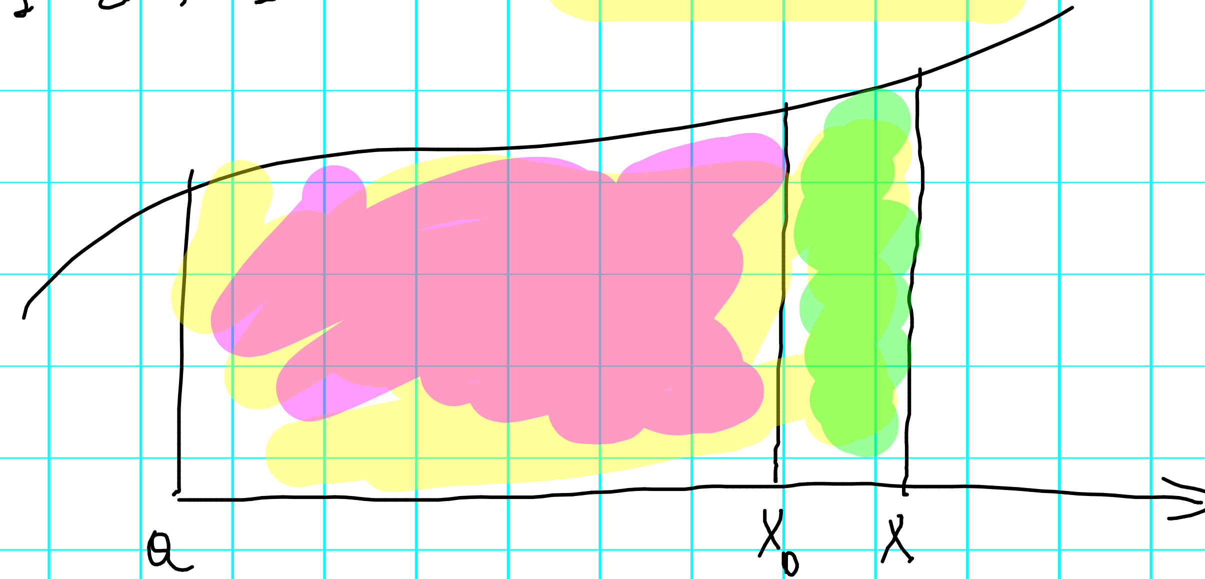
3) $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

4) $$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Sei f eine stetige Funktion auf $[a,b]$.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Setze $$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



Vielleicht ist F differenzierbar?

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} =$$

$$F(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)\,dt$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0}$$ „durchschnittlicher Wert von f auf dem Intervall $[x_0, x]$"

Stetigkeit
$$= f(x_0).$$

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil 1)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f integrierbar auf $[a,b]$.

Setze
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{für } x \in [a,b].$$

Dann ist F auf $[a,b]$ differenzierbar und es gilt
$$F'(x) = f(x)$$
für alle $x \in [a,b]$.

17.1.2012

Definition. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit
$$F'(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in [a,b],$$
so heißt F eine Stammfunktion von f.
Wir schreiben

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

„unbestimmtes Integral"

<u>Bem.</u> HS DR/IR I sagt: Wenn f stetig ist, so ist

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{eine Stammfunktion von } f.$$

<u>Bemerkung.</u> Wenn F eine Stammfunktion von f ist, so ist auch $F(x)+C$ für jede beliebige Konstante C eine Stammfunktion von f, weil

$$\left(F(x)+C\right)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Nehmen wir an, wir haben $f: [a,b]$ stetig gegeben, irgendwoher eine Stammfunktion $F(x)$ von f erhalten, wir interessieren uns für

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

Dann unterscheiden sich $F(x)$ und $G(x)$ durch eine Konstante C, also

$$G(x) = F(x) + C.$$

Wir wissen:

$$F(a) + C = G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

Somit

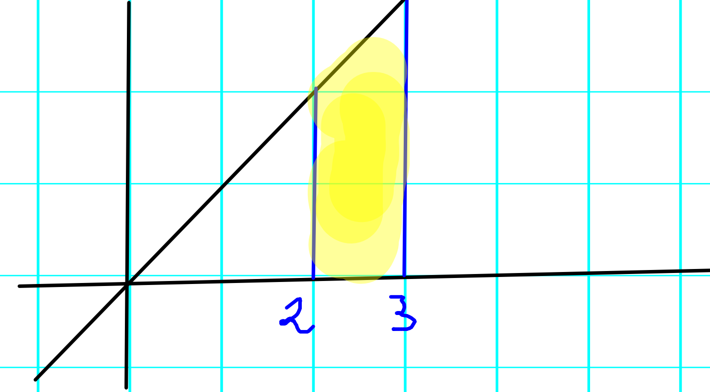
$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

<u>Satz</u> (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Teil 2) Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, F eine Stammfunktion von f, so gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(= F(x)\Big|_a^b \right)$$

Beispiele. 1) $\displaystyle\int_2^3 x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_2^3 =$

$$= \frac{1}{2}\cdot 9 - \frac{1}{2}\,4 = \frac{1}{2}(9-4) = \frac{5}{2}$$



$$\frac{5}{2}\cdot 1 = \frac{5}{2}$$

Bemerkung. 1) Da $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$, gilt

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

2) Wegen $\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$ gilt

$$\int f(x)+g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

3) Wegen $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$ für Konstante c gilt

$$\int c f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

<u>Beispiel</u>.

$$\int_1^2 x^3 + 17x^2 + 2012\, dx = \frac{x^4}{4} + 17\frac{x^3}{3} + 2012x \Big|_1^2 =$$

$$= 4 + \frac{8 \cdot 17}{3} + 4024 - \frac{1}{4} - \frac{17}{3} - 2012 = \ldots$$

Liest man eine Differentiationstabelle rückwärts, so erhält man eine erste Tabelle von Stammfunktionen:

$f(x)$	$F(x)$
c	cx
x^n mit $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\ln x$	$x \ln x - x$
$\log_a x$	$\frac{x \ln x - x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln\|\cos x\|$
$\cot x$	$\ln\|\sin x\|$

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$
$\frac{x^2}{x^2+1}$	$x - \arctan x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln\|\cosh x\|$
$\coth x$	$\ln\|\sinh x\|$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ mit $x > 1$	$\operatorname{arcosh} x$
$\frac{1}{1-x^2}$ mit $\|x\| < 1$	$\operatorname{artanh} x$
$\frac{1}{1-x^2}$ mit $\|x\| > 1$	$\operatorname{arcoth} x$

(überprüfe durch Differentiation ....)

Beispiel.

$$\int \frac{1}{1+x^2} + 7\cosh(5x) + \frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{4x^2}_{(2x)^2}}}\,dx =$$

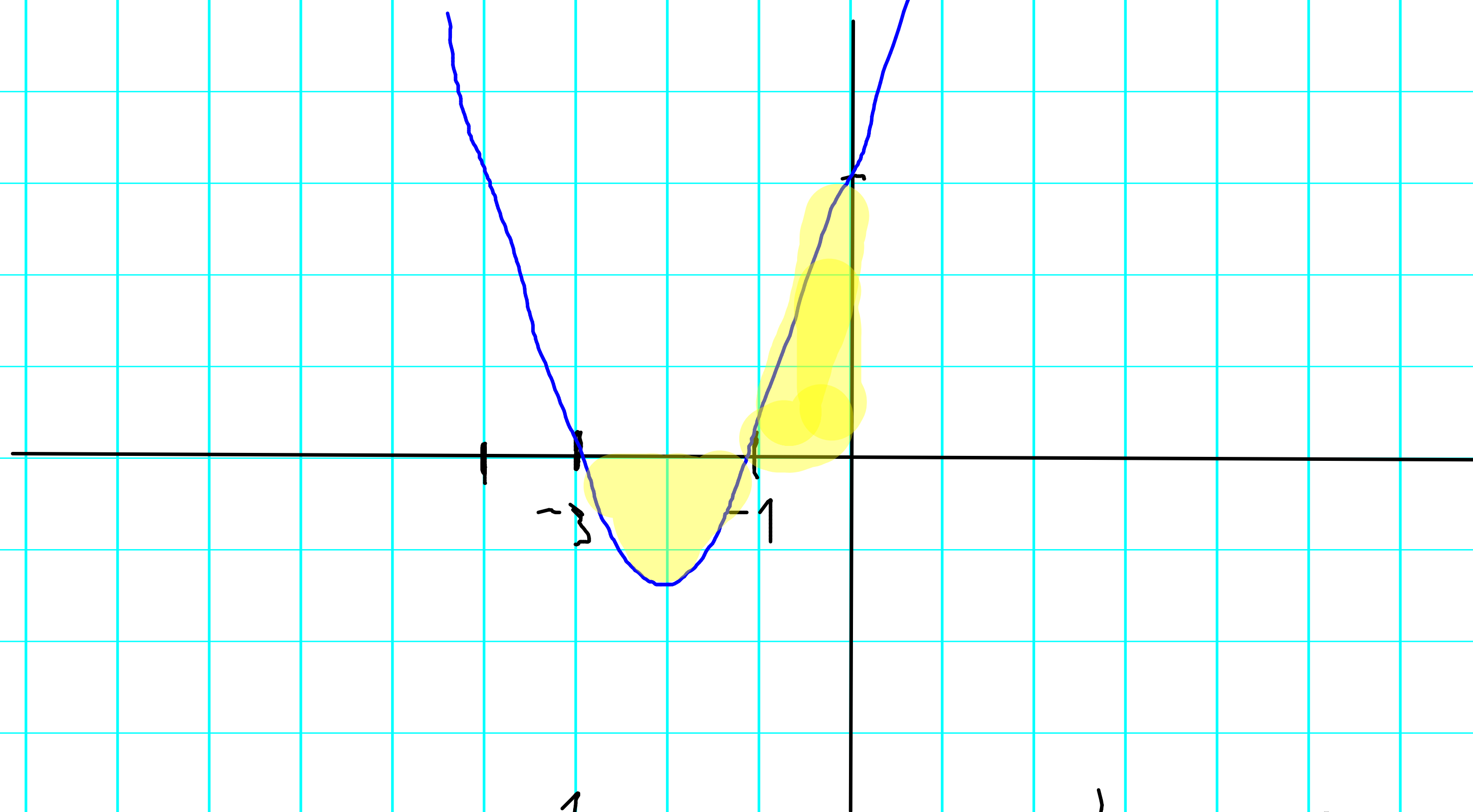
$$= \arctan x + \frac{7}{5}\sinh(5x) + \frac{1}{2}\arcsin 2x + C$$

Weitere Integrationsregeln siehe Sommersemester.

4.2 Anwendungen der Integralrechnung

4.2.1 Flächenberechnung

Beispiel. Berechne die Fläche, die von der Funktion $f(x) = x^2 + 4x + 3$, der x-Achse, $x = -3$ und der y-Achse eingeschlossen wird.



Nullstellen:

$x^2+4x+3=0$

$x = -2 \pm \sqrt{4-3} =$

$= -3$ oder -1

gesuchte Fläche $= \left| \int_{-3}^{-1} x^2+4x+3 \, dx \right| + \left| \int_{-1}^{0} x^2+4x+3 \, dx \right| =$

$$= \left| \frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 3x \Big|_{-3}^{-1} \right| + \left| \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x \Big|_{-1}^{0} \right| =$$

$$= \left| \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right) - (-9+18-9) \right| + \left| 0 - \left(-\frac{4}{3}\right) \right| =$$

$$= \left| -\frac{4}{3} - 0 \right| + \left| \frac{4}{3} \right| = \left| -\frac{4}{3} \right| + \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{8}{3}.$$

Was wäre passiert, wenn wir Betragsstriche vergessen hätten und nicht aufgeteilt hätten?

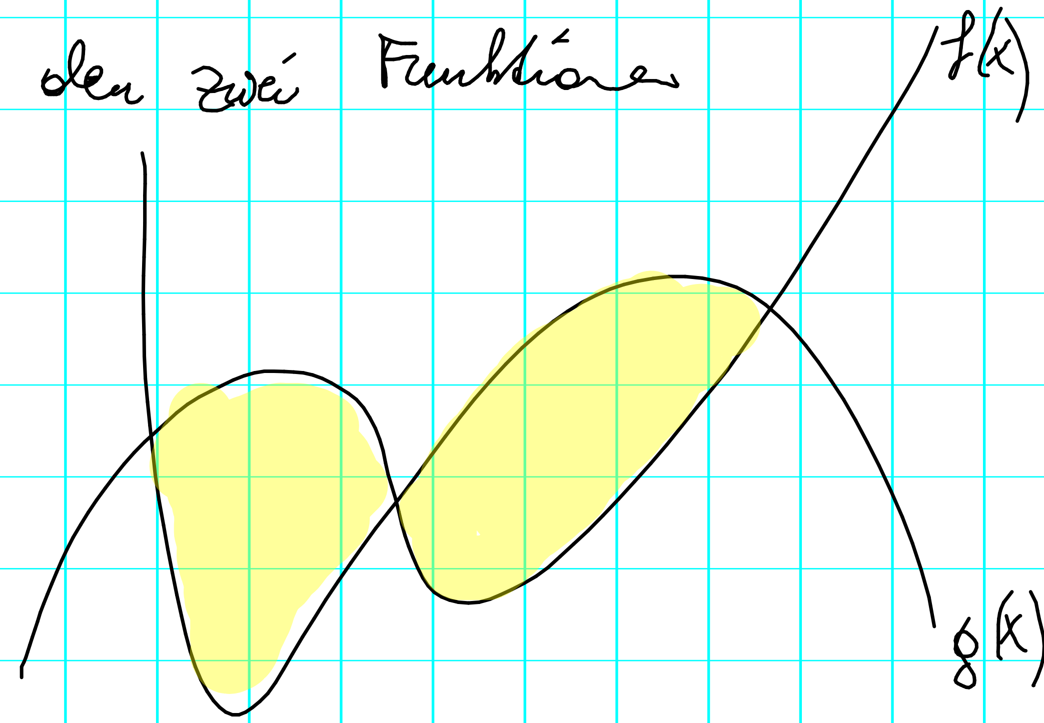
$$\int_{-3}^{0} x^2+4x+3\,dx = \frac{x^3}{3}+2x^2+3x \Big|_{-3}^{0} = 0-(\underbrace{-9+18-9}_{0})=0-0=0$$

und spätestens hier wären wir hoffentlich draufgekommen, dass das nicht sein kann...

Beispiel: Berechne die Fläche zwischen den zwei Funktionen

$f(x) = x^3+4x^2-6x+2$

$g(x) = -3x^3+12x^2+14x-22$



Bestimme Schnittpunkte

$$x^3+4x^2-6x+2=-3x^3+12x^2+14x-22$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^3-8x^2-20x+24=0 \qquad |:4$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3-2x^2-5x+6=0$$

$$(x-1)(x^2-x-6)=0$$

$$(x-1)(x-3)(x+2)=0$$

Nullstellen: $x=-2,\ x=1,\ x=3$

ges. Fläche $= \left|\int_{-2}^{1}(f(x)-g(x))\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3}(f(x)-g(x))\,dx\right| =$

$$= \left|\int_{-2}^{1} 4x^3-8x^2-20x+24\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3} 4x^3-8x^2-20x+24\,dx\right|$$

$$= \ldots = \frac{253}{3},$$

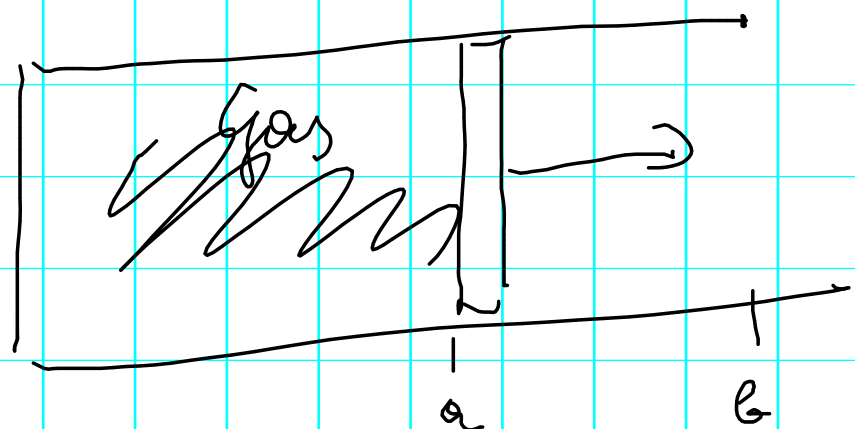
<u>Bemerkung</u> Fläche zwischen zwei Funktionen f und g:

$$\left| \int f(x) - g(x) \, dx \right|$$

von Nullstelle (oder sonstigen Rand) zu Nullstelle (oder sonst. Rand) integrieren,

4.2.2. Andere integrale Größen, zB Arbeit

<u>Beispiel</u>



Druck $p = p(V)$

Arbeit = Kraft × Weg. Kraft = $p \cdot B$

B -- Querschnitt

$$\Rightarrow \text{Arbeit} = \int_a^b p(V) \cdot B \, dx = \int_{V_1}^{V_2} p(V) \, dV$$

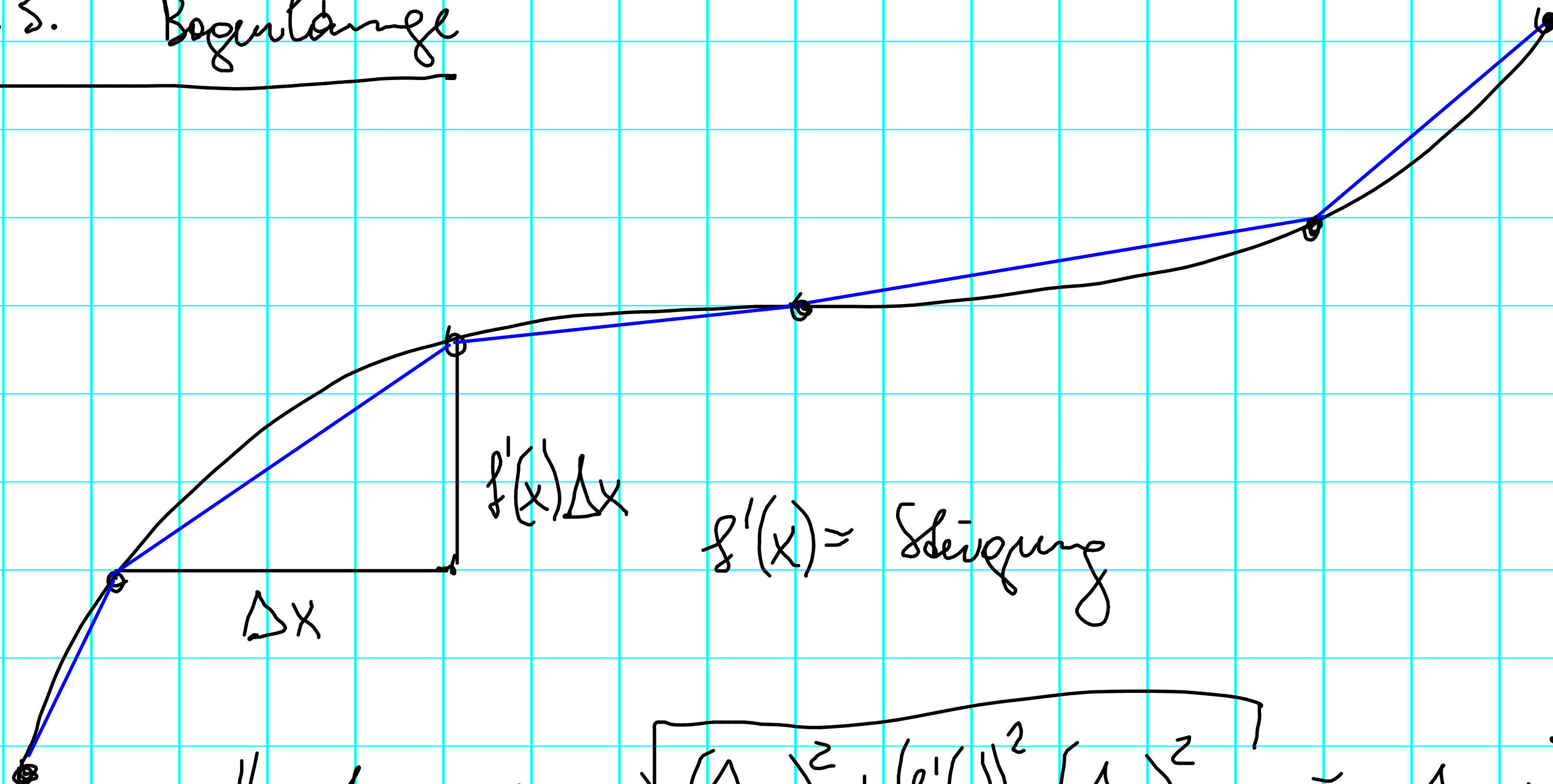
z.B. ideales Gas $\qquad p(V) = \frac{nRT}{V}$

in diesem Fall physikalisch unwichtig

$$\text{Arbeit} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} \, dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \, dV = nRT \ln |V| \Big|_{V_1}^{V_2} =$$

$$= nRT \left(\ln V_2 - \ln V_1 \right) = \underline{\underline{nRT \ln \frac{V_2}{V_1}}}$$

4.2.3. Bogenlänge



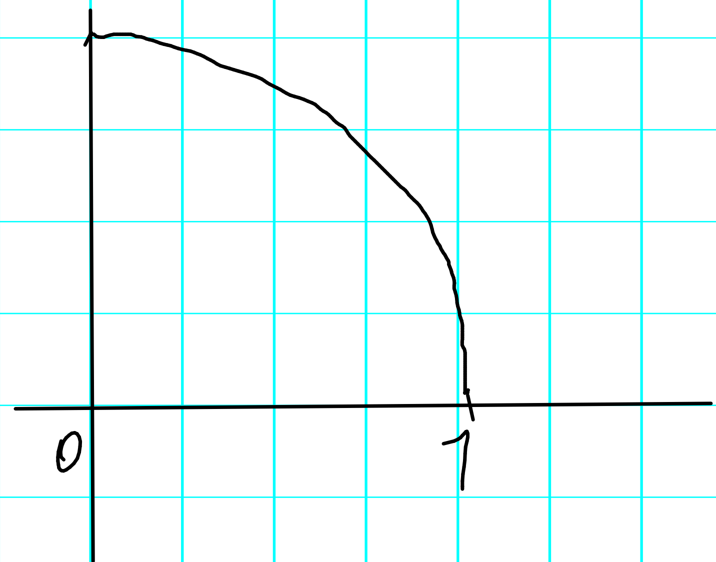
$f'(x) =$ Steigung

Unterteile in Polygonzug, verfeinere Unterteilung, erhalte Bogenlänge.

Hypotenuse: $\sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x))^2 (\Delta x)^2} = \Delta x \sqrt{1 + f'(x)^2}$

$$\boxed{\text{Bogenlänge} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}.$$

Beispiel Bogenlänge des Einheits-Viertelkreises. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$



$$x^2+y^2 = 1 \iff y^2 = 1-x^2$$

$$\overset{y \geq 0}{\iff} \quad y = \sqrt{1-x^2}$$

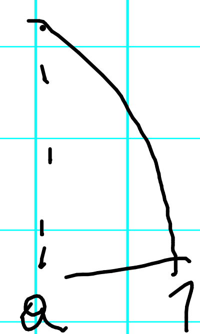
Bogenlänge des Viertelkreises: $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx =$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\,\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\arccos x \Big|_0^1 = \left(-0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(das glauben wir schon lang).



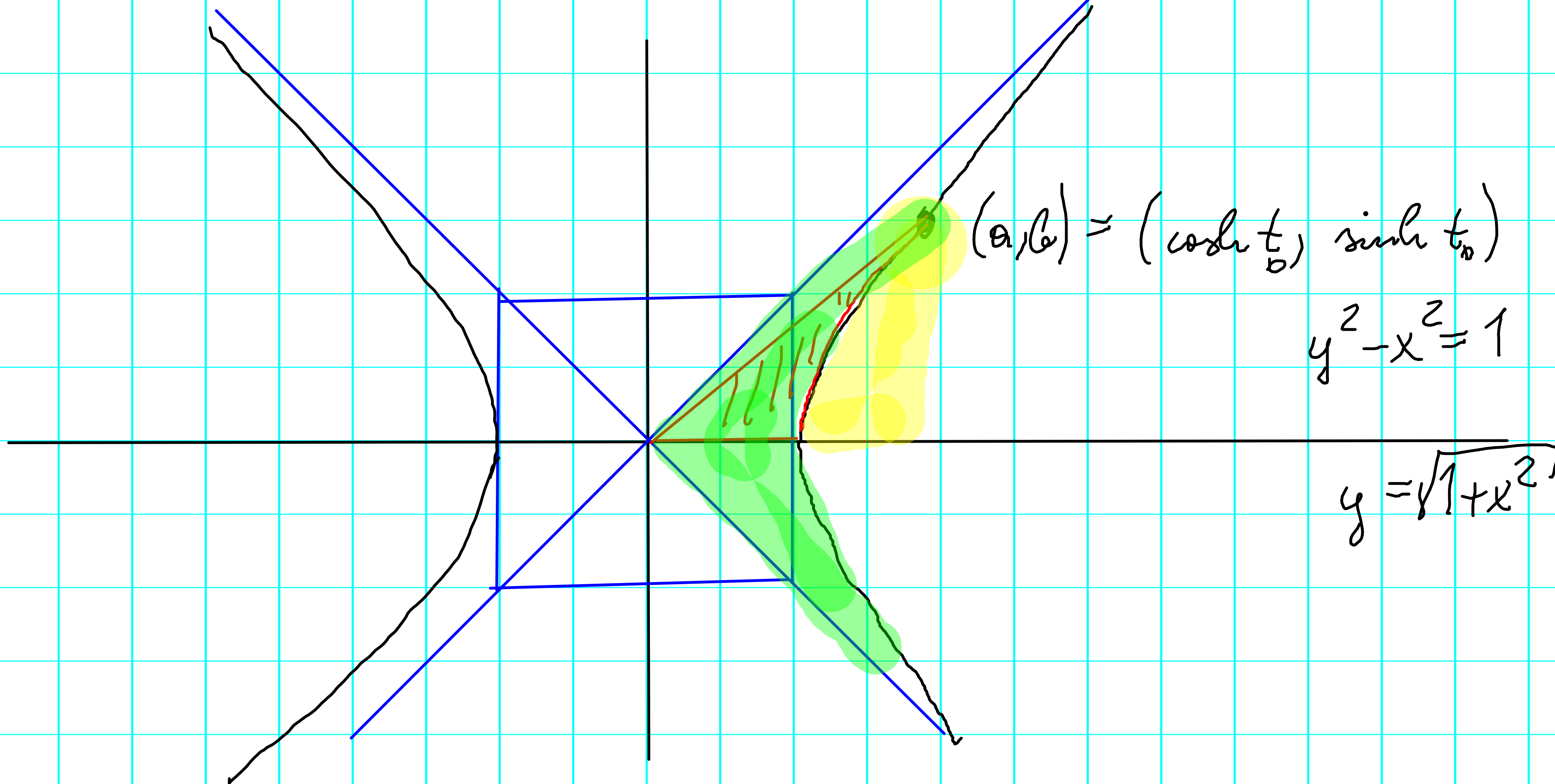
Einheitskreis, Bogenlänge von $x=a$ bis $x=1$:

(gleiche Rechnung)

... Bogenlänge $= -\arccos x \Big|_a^1 = 0 + \arccos a.$

Können wir was Ähnliches für Hyperbelfunktionen erhalten und vielleicht herausfinden, warum die Areafunktionen so heißen, wie sie heißen?

Hyperbel $(\cosh t, \sinh t)$ $\qquad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$



Berechne rote Fläche:

$$= \frac{ab}{2} - \text{gelbe Fläche} = \frac{ab}{2} - \int_1^a \sqrt{1+x^2}\,dx =$$

$$= \begin{pmatrix} x = \cosh t \\ dx = \sinh t\,dt \end{pmatrix} = \frac{ab}{2} - \int_0^{t_0} \sinh t \cdot \sinh t\,dt =$$

$$= \frac{\cosh t_0 \sinh t_0}{2} - \int_0^{t_0} \frac{\cosh 2t - 1}{2}\, dt = \quad \left[\begin{aligned} \cosh 2t &= \cosh^2 t + \sinh^2 t \\ &= 1 + 2\sinh^2 t \end{aligned} \right.$$

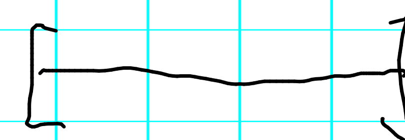
$$\sinh^2 t = \frac{\cosh 2t - 1}{2}$$

$$= \frac{\cosh t_0 \sinh t_0}{2} - \frac{\sinh 2t}{2 \cdot 2}\Big|_0^{t_0} + \frac{t_0}{2} = \frac{t_0}{2}.$$

also $t_0 = \operatorname{arcosh} a =$ grüne Fläche (2mal rote Fläche).

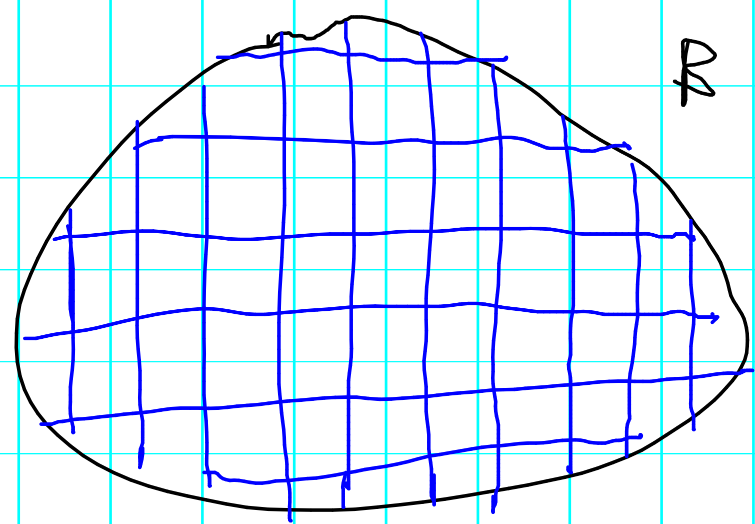
18.1.2012

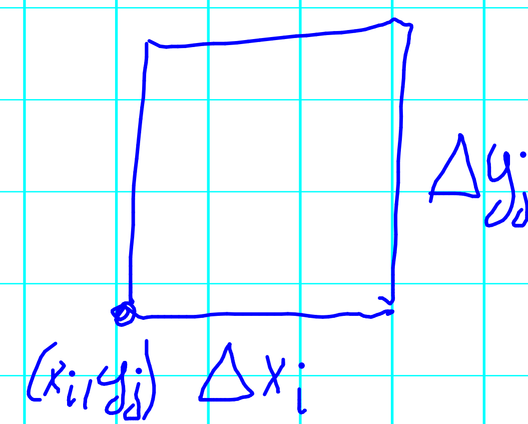
4.3. Mehrfachintegrale

Bis jetzt: integriere Funktion über ein Intervall: 

„summiere Funktionswerte, multipliziert mit Intervallbreite, auf", Deutung als Fläche odgl.

Jetzt: Nehme $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^n$) und eine Funktion $f: B \to \mathbb{R}$





$$\sum \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Funktionswert}}}{f(x_i, y_j)} \times \underbrace{\Delta x_i \, \Delta y_j}_{\text{Fläche des kleinen Rechtecks}}$$

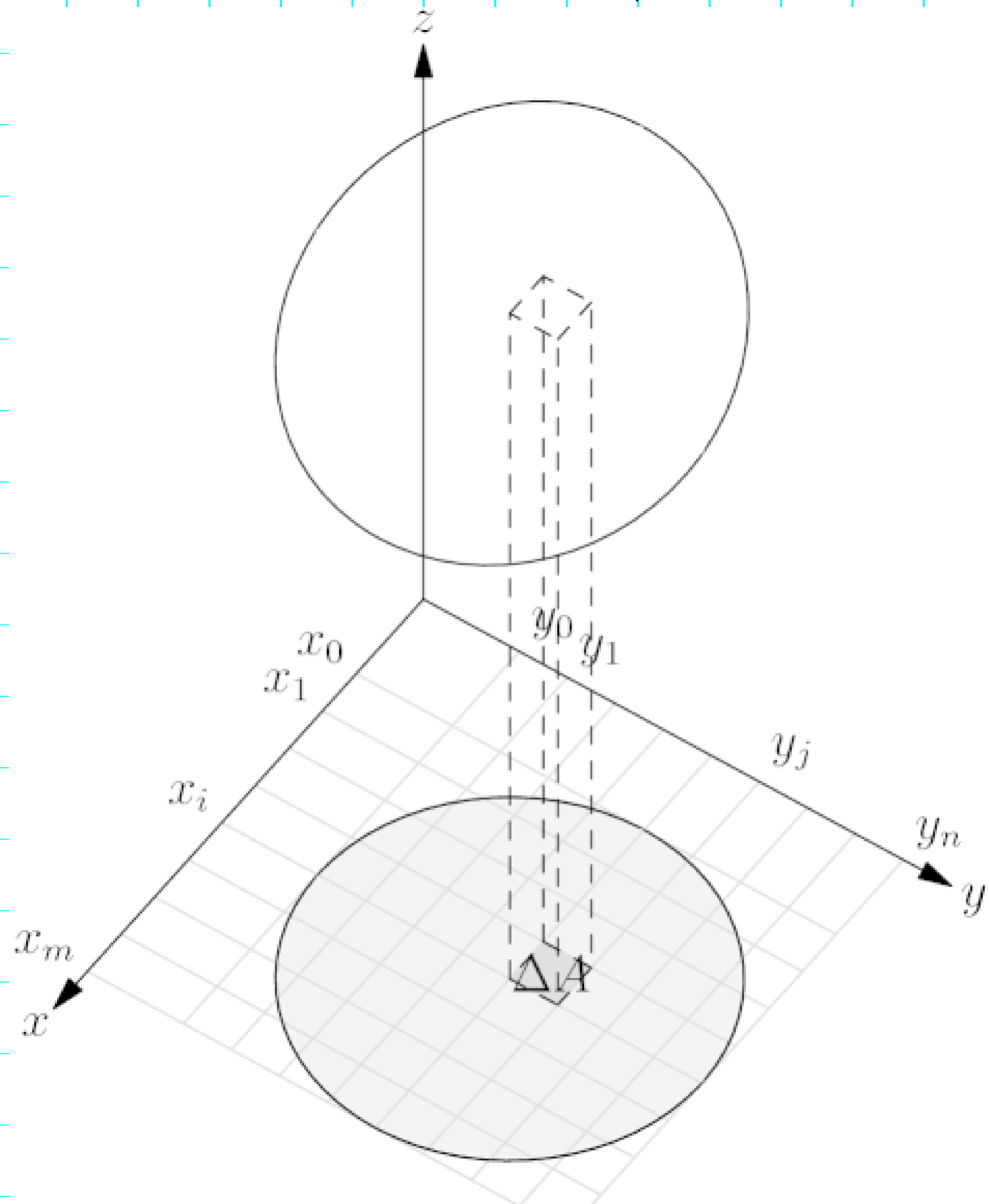
Verfeinere die Zerlegung, wenn im Grenzwert ein eindeutiger Wert herauskommt, nennen wir das den Wert des Mehrfachintegrals

$$\iint_B f(x,y) \, dx \, dy$$

Das kann als Volumen des Körpers, der von xy-Ebene und der Fläche

$z = f(x,y)$

eingeschlossen wird, gesehen werden.



Dasselbe funktioniert in $\mathbb{R}^3$: $\quad B \subseteq \mathbb{R}^3 \quad f: B \to \mathbb{R}$,

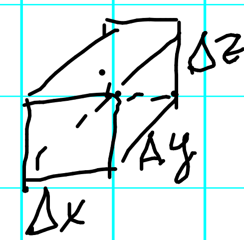
$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Beispiele:

1) B "Körper" mit variabler Dichte $\varrho(x,y,z)$

$$\text{Masse} = \iiint \varrho(x,y,z)\,\underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV}$$

V ... Volumen



$$\sum \varrho(x_i, y_j, z_k)\,\Delta V_{ijk} \longrightarrow \iiint \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

2)

B Körper mit variabler Dichte $\rho(x,y,z)$;
möchte Schwerpunkt $S = (x_S, y_S, z_S)$ bestimmen.

$$x_S = \frac{\iiint_B x \, \rho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}{\iiint_B \rho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz} \quad \leftarrow \text{Gesamtmasse}$$

$$y_S = \frac{\iiint_B y \, \rho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}{\iiint_B \rho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}$$

$$z_S = \frac{\iiint_B z \, \rho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}{\iiint_B \rho(x,y,z) \, dx\,dy\,dz}$$

Wie kann man Mehrfachintegrale ausrechnen?

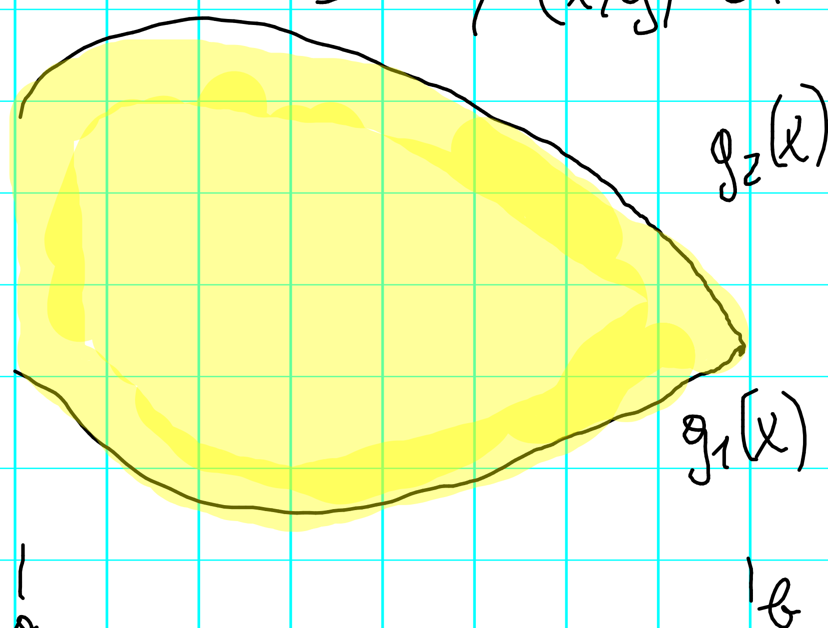
<u>Definition</u>: Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann heißt B

1) ein Normalbereich bzgl. x, wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ und zwei Funktionen $g_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

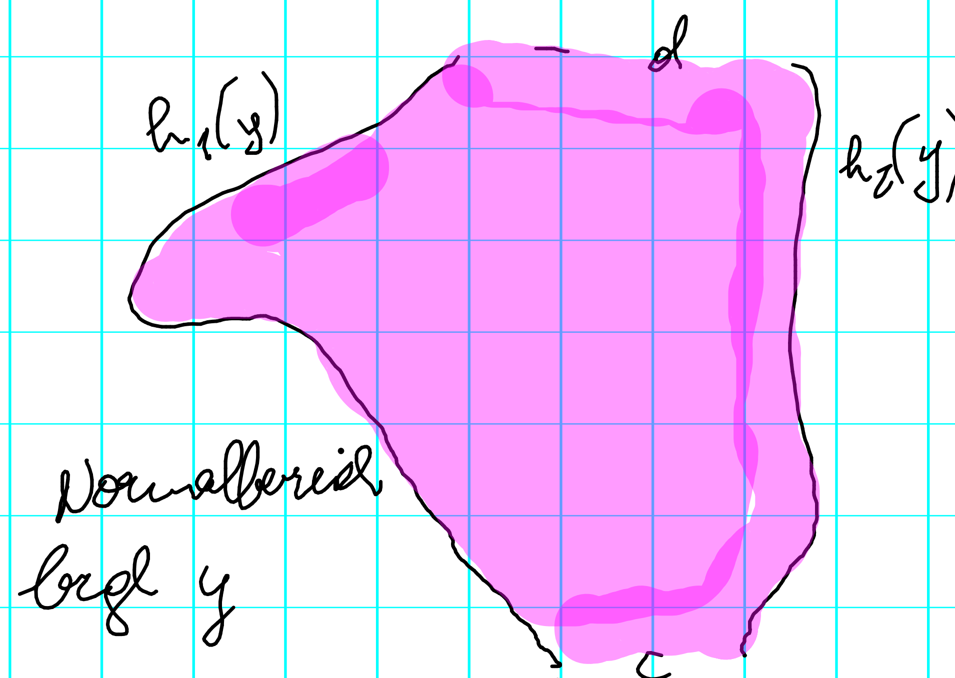
$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b ; \quad g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$$

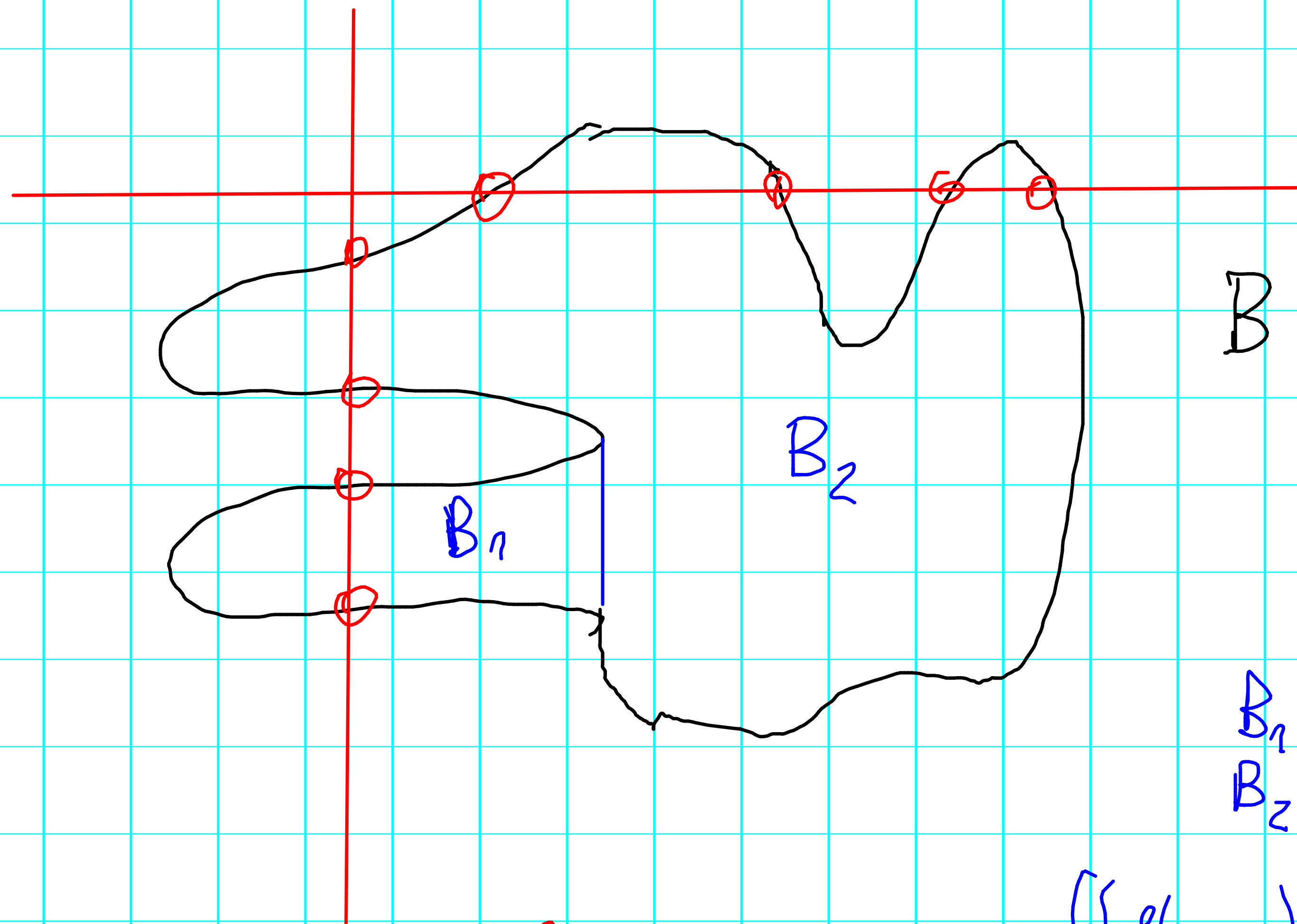
2) ein Normalbereich bzgl y, wenn es $c, d \in \mathbb{R}$ und zwei Funktionen $h_1 : [c,d] \to \mathbb{R}$, $h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \le y \le d \quad h_1(y) \le x \le h_2(y) \}.$$



Normalbereich bzgl x





– kein Normalbereich nach y

B

kein Normalbereich nach x

Man könnte das aber in Normalbereiche zerlegen

B_1 ... Normalbereich bzgl x

B_2 ... Normalbereich bzgl x

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{B_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Satz (Fubini) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : B \to \mathbb{R}$ integrierbar.

1) Wenn B ein Normalbereich bzgl x ist, so gilt mit den obigen Notationen

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

2) Wenn B ein Normalbereich bzgl y ist, so gilt mit den obigen Notationen

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

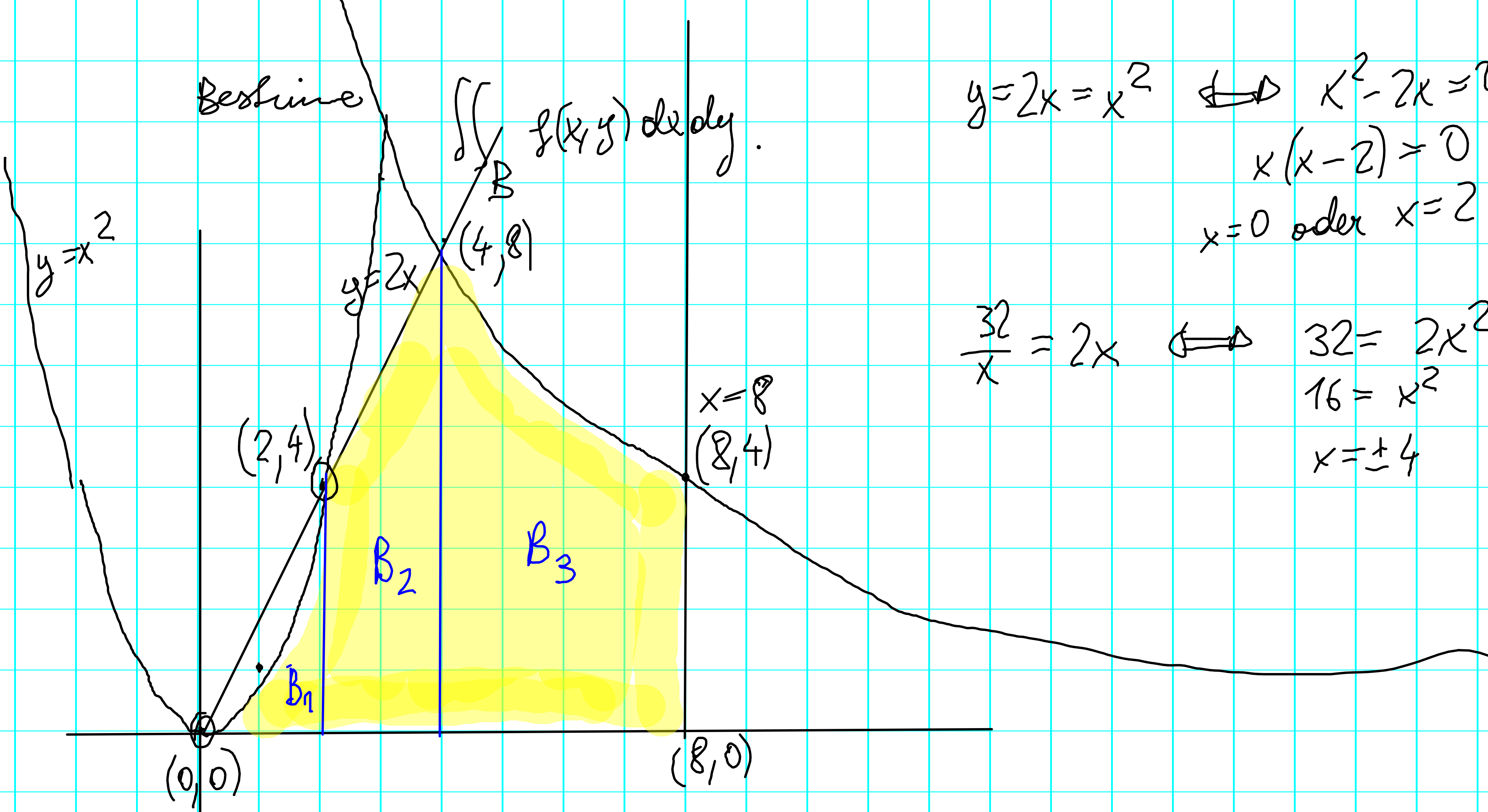
Beispiel. $f(x,y) = xy$

Bereich B: berandet von $y = x^2$, x-Achse.

$y = 32/x$, $x = 8$

$y = 2x$,

Bestimme $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$.



$$y=2x=x^2 \Leftrightarrow x^2-2x=0$$
$$x(x-2)=0$$
$$x=0 \text{ oder } x=2$$

$$\frac{32}{x}=2x \Leftrightarrow 32=2x^2$$
$$16=x^2$$
$$x=\pm 4$$

$$I := \iint_B xy\,dx\,dy = \underbrace{\iint_{B_1} xy\,dx\,dy}_{=:I_1} + \underbrace{\iint_{B_2} xy\,dx\,dy}_{=:I_2} + \underbrace{\iint_{B_3} xy\,dx\,dy}_{=:I_3}$$

$$I_1 = \int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=0}^{x^2} xy \, dy \right) dx = \int_{x=0}^{2} x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^2} dx = \int_{x=0}^{2} \frac{x^5}{2} - 0 \, dx = \frac{x^6}{12} \Big|_0^2 = \frac{16}{3}$$

$$I_2 = \int_{x=2}^{4} \int_{y=0}^{2x} xy \, dy \, dx = \int_{x=2}^{4} \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{2x} dx = \int_{x=2}^{4} 2x^3 \, dx = \frac{x^4}{2} \Big|_2^4 = 128 - 8 = 120$$

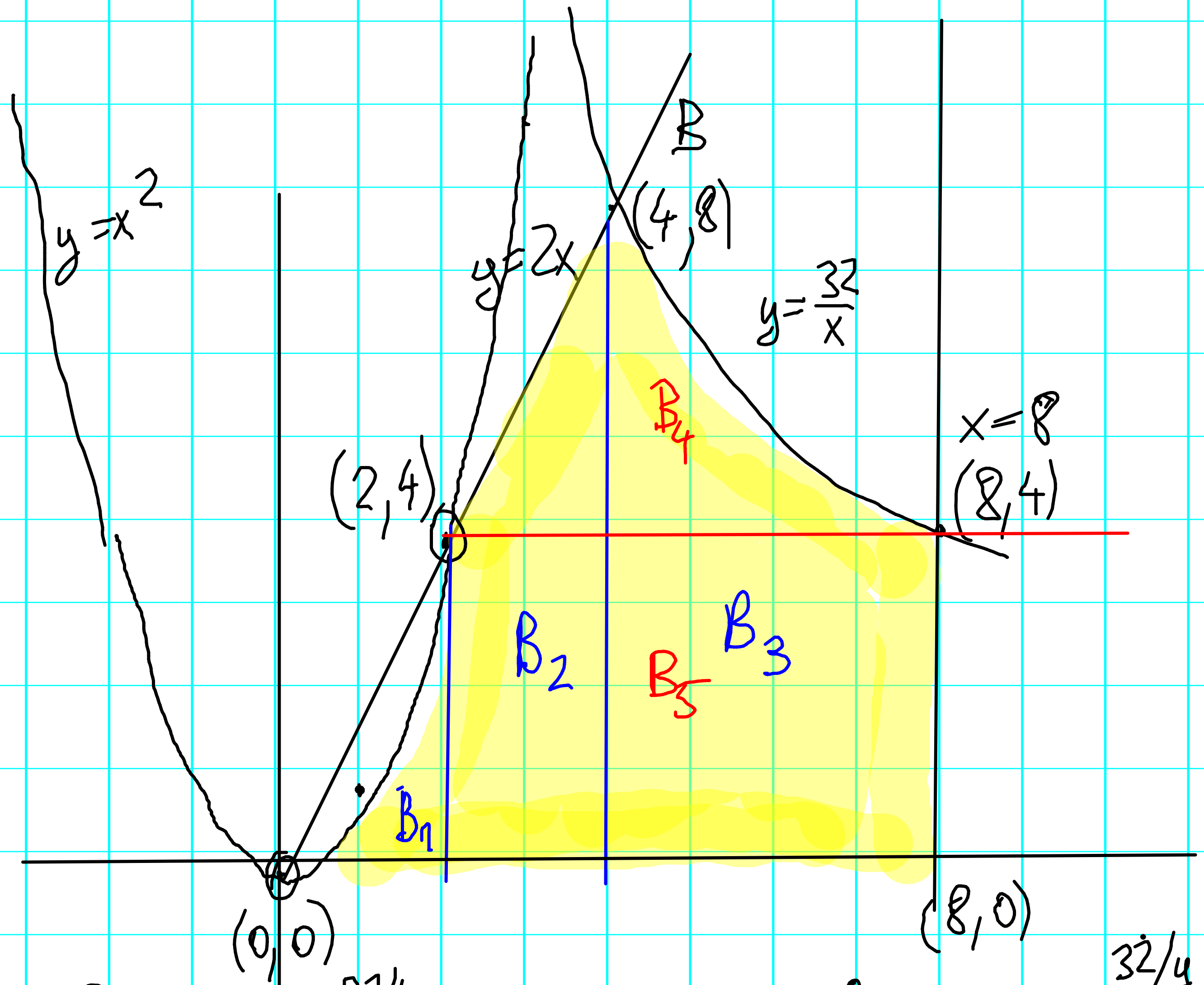
$$I_3 = \int_{x=4}^{8} \int_{y=0}^{32/x} xy \, dy \, dx = \int_{x=4}^{8} \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{32/x} dx = \int_{x=4}^{8} \frac{512}{x} dx = 512 \ln|x| \Big|_4^8 =$$

$$= 512 (\ln 8 - \ln 4) = 512 \ln\left(\frac{8}{4}\right) =$$

$$= 512 \ln 2$$

$$I = \frac{16}{3} + 120 + 512 \ln 2 = \underline{\frac{376}{3} + 512 \ln 2}.$$

oder:



$$I = I_4 + I_5$$

$$I_4 = \iint_{B_4} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$I_5 = \iint_{B_5} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$I_4 = \int_{y=4}^{8} \int_{x=y/2}^{32/y} xy\,dx\,dy = \int_{y=4}^{8} \frac{x^2 y}{2}\Big|_{y/2}^{32/y} dx = \int_{y=4}^{8} \frac{512}{y} - \frac{y^3}{8}\,dy =$$

$$= 512 \ln|y| - \frac{y^4}{32}\Big|_4^8 = 512 \ln 2 - 128 + 8 = 512 \ln 2 - 120$$

$$I_5 = \int_{y=0}^{4} \int_{x=\sqrt{y}}^{8} xy \, dx \, dy = \int_{y=0}^{4} \frac{x^2 y}{2} \Big|_{\sqrt{y}}^{8} dy = \int_{y=0}^{4} 32y - \frac{y^2}{2} \, dy = 16y^2 - \frac{y^3}{6} \Big|_0^4 =$$

$$= 256 - \frac{32}{3}$$

$$I = 512 \ln 2 + 136 - \frac{32}{3} = 512 \ln 2 + \frac{408 - 32}{3} =$$

$$= 512 \ln 2 + \frac{376}{3}.$$