Analysis 1

Jan Pöschko

auf Grundlage der Vorlesung von
Univ.-Prof. Robert Tichy
und
Univ.-Prof. Peter Grabner
im Wintersemester 2005/2006

13. Dezember 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Ungleichungen

1.1 Arithmetisch-geometrische Mittelungleichung

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$. Dann gilt:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

1.2 Bernoulli-Ungleichung

Für $x > -1$ und $r > 0$ gilt:

$$(1+x)^r \begin{cases} \geq 1 + rx & \text{wenn } r \geq 1 \\ \leq 1 + rx & \text{wenn } r \leq 1 \end{cases}$$

1.3 Hölder-Ungleichung

Für $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ und $p, q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Spezialfall $p = q = 2$: Cauchy-Schwarz-Ungleichung

1.4 Minkowski-Ungleichung

Für $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ und $p \geq 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} (|x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Spezialfall $p = 2$: Dreiecksungleichung im euklidschen Raum

2 Folgen

2.1 Häufungspunkte

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt einer Folge (a_n), falls in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0) = \{x : d(x, x_0) < \varepsilon\}$ von x_0 unendlich viele Folgenglieder a_n liegen:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall n > N : a_n \in U_\varepsilon(x_0)$$

2.2 Grenzwerte

Definiere

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_k : k \geq n\})$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_k : k \geq n\}).$$

Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist also genau dann der Limes superior einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für fast alle Indizes $n \in \mathbb{N}$ (d.h. für alle bis auf endlich viele) gilt
$$a_n < a + \varepsilon.$$
2. Es gibt unendlich viele Indizes $m \in \mathbb{N}$ mit
$$a_m > a - \varepsilon.$$

2.3 Konvergenz

Jede beschränkte monotone Folge ist konvergent.

Satz von Cauchy: Dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert ist gleichbedeutend mit

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \, \forall n \geq n_0 : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon.$$

3 Reihen

Notwendig für die Konvergenz: Glieder a_n bilden eine Nullfolge (nicht hinreichend).

Eine Reihe mit positiven Gliedern ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

3.1 Satz von Cauchy

Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \, \forall n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

3.2 Majorantenkrierium

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und $0 \leq b_k \leq a_k$, dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und $\leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

3.3 Minorantenkriterium

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent und $b_k \geq a_k \geq 0$, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent.

3.4 Wurzelkriterium

Existiert ein $q < 1$, sodass

$$\forall k : \sqrt[k]{a_k} \leq q < 1$$

gilt (zumindest für „fast alle“ k), dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

Es genügt zu zeigen:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_k} < 1$$

3.5 Quotientenkriterium

Existiert ein $0 < q < 1$, sodass

$$\forall k : \frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1$$

gilt, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. Bei

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$$

divergiert die Reihe.

3.6 Leibniz-Kriterium

Wenn a_k eine monoton fallende Nullfolge ist, dann ist die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent.

3.7 Bekannte Reihen

- Harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{konvergent} & \alpha > 1 \\ \text{divergent} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

- Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} \text{konvergent} & |q| < 1 \\ \text{divergent} & |q| \geq 1 \end{cases}$$

- „Teleskopreihen“: z.B.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

- Exponentialfunktion:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

4 Funktionen

4.1 Stetigkeit

Eine Funktion f heißt *stetig in* x, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(x_n \in D)$, für die $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt, auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ gilt, also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$

5 Grenzwertberechnung

5.1 Regel von De L'Hospital

Seien f und g stetig differenzierbar auf $[a, b]$ und sei $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

falls $g'(x_0) \neq 0$.

1. Die Regel kann wiederholt werden, falls $g'(x_0) = 0$.
2. Die Regel ist auch richtig für $x_0 = \pm\infty$.
3. Die Regel ist auch richtig für die unbestimmte Form $\frac{\infty}{\infty}$, d.h.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

5.2 Umformungen

- „$\frac{0}{0}$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“: De L'Hospital direkt anwenden
- „$0 \cdot \infty$“:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x \cdot \ln x &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= -\lim_{x\to 0} x = 0 \end{aligned}$$

- „$\infty - \infty$“:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to x_0} \frac{g_1(x) - f_1(x)}{f_1(x) \cdot g_1(x)}$$

  mit $f_1(x) = \frac{1}{f(x)}$ und $g_1(x) = \frac{1}{g(x)}$.

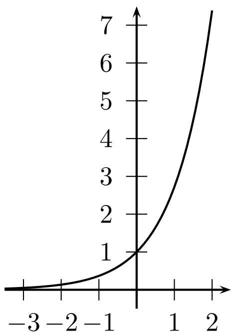
- „0^0“, „∞^0“, „1^{∞}“:
  Durch Logarithmieren, z.B.

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\cdot\ln x} = e^{\lim_{x\to 0+} x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

6 Exponentialfunktion

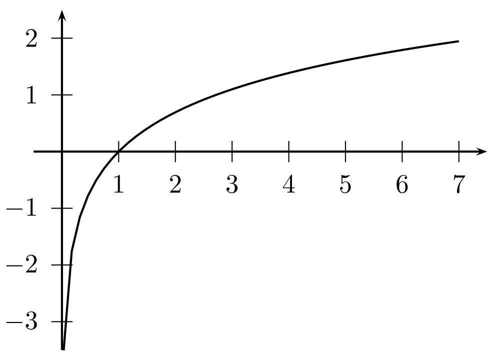
6.1 Exponentialfunktion

$$
\begin{aligned}
e^x &= \exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \\
(e^x)' &= e^x \\
\int e^x \, \mathrm{d}x &= e^x + C
\end{aligned}
$$



6.2 Logarithmus

$$
\begin{aligned}
\ln(x+1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \\
\ln \frac{1}{x} &= -\ln x \\
\log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a} \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x} \\
\int \ln x \, \mathrm{d}x &= x \ln x - x
\end{aligned}
$$



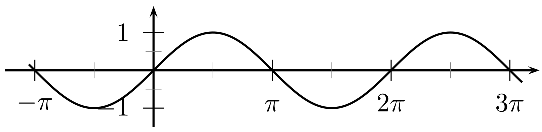
6.3 Satz von Euler

$$
e^{ix} = \cos x + i \sin x
$$

7 Trigonometrische Funktionen

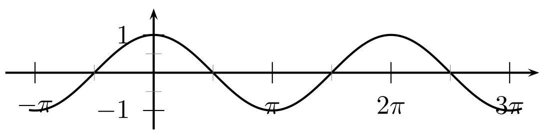
7.1 Sinus

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\
(\sin x)' &= \cos x \\
\int \sin x \, \mathrm{d}x &= -\cos x + C
\end{aligned}
$$



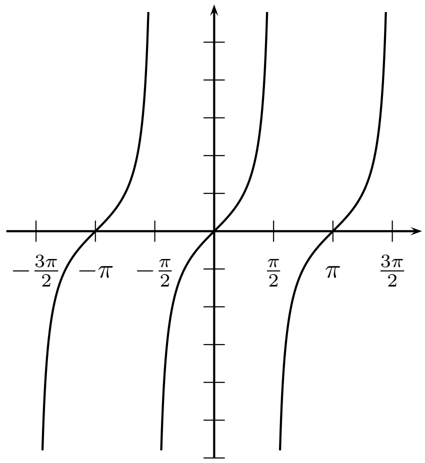
7.2 Cosinus

$$
\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
\int \cos x \, \mathrm{d}x &= \sin x + C
\end{aligned}
$$



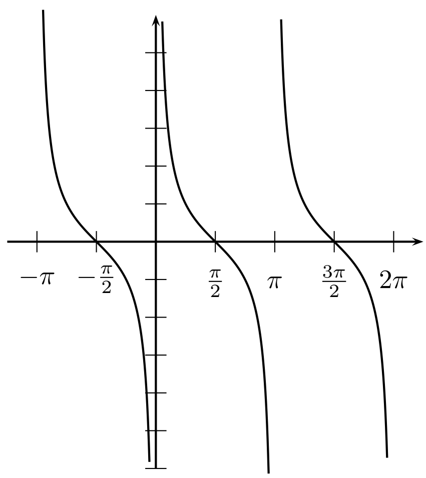
7.3 Tangens

$$
\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\int \tan x \, \mathrm{d}x &= -\ln|\cos x| + C
\end{aligned}
$$



7.4 Cotangens

$$
\begin{aligned}
\cot x &= \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \\
(\cot x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\
\int \cot x \, \mathrm{d}x &= \ln|\sin x| + C
\end{aligned}
$$



7.5 Satz von Pythagoras

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

7.6 Additionstheoreme

$$
\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y
\end{aligned}
$$

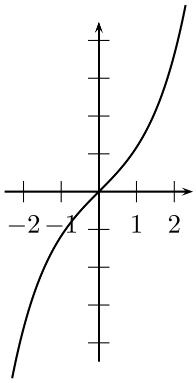
8 Hyperbolische Funktionen

8.1 Sinus hyperbolicus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$\int \sinh x = \cosh x + C$$

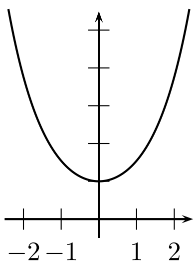


8.2 Cosinus hyperbolicus

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$\int \cosh x \ \mathrm{d}x = \sinh x + C$$

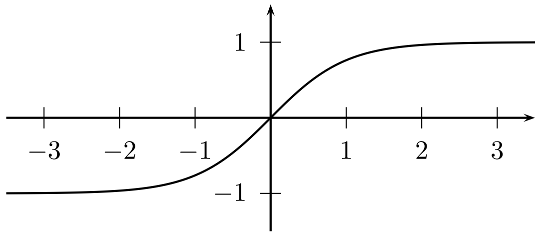


8.3 Tangens hyperbolicus

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$\int \tanh x \ \mathrm{d}x = \ln \cosh x + C$$

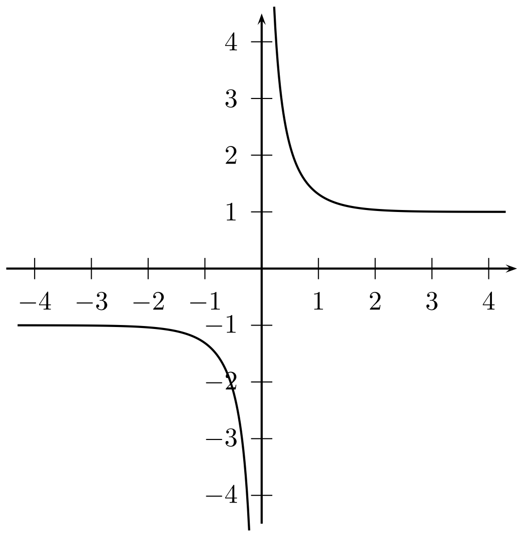


8.4 Cotangens hyperbolicus

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$(\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

$$\int \coth x \ \mathrm{d}x = \ln \sinh x + C$$



8.5 Zusammenhang

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$$

9 Zyklometrische Funktionen

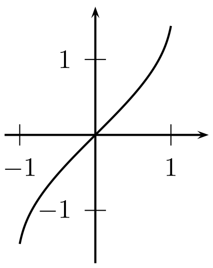
9.1 Arcus Sinus

$D = [-1; 1], W = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\arcsin x = \sin^{-1}|_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}(x)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{mit } x \in (-1, 1)$$

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$



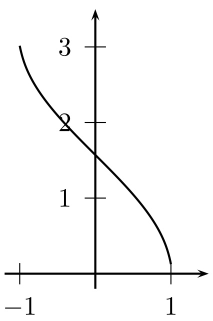
9.2 Arcus Cosinus

$D = [-1; 1], W = [0; \pi]$

$$\arccos x = \cos^{-1}|_{[0;\pi]}(x)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{mit } x \in (-1, 1)$$

$$\int \arccos x \, \mathrm{d}x = x \cdot \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$$



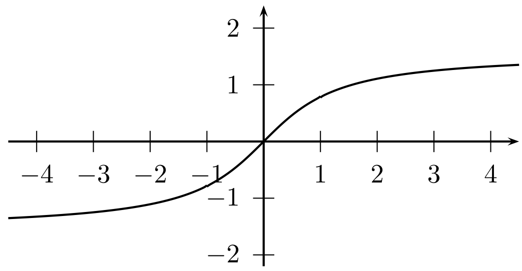
9.3 Arcus Tangens

$D = \mathbb{R}, W = (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$$\arctan x = \tan^{-1}|_{(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})}(x)$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \arctan x \, \mathrm{d}x = x \cdot \arctan x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$



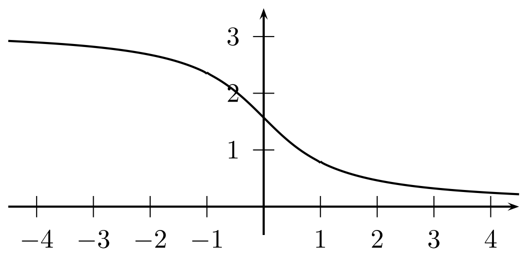
9.4 Arcus Cotangens

$D = \mathbb{R}, W = (0; \pi)$

$$\operatorname{arccot} x = \cot^{-1}|_{(0;\pi)}(x)$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \operatorname{arccot} x \, \mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arccot} x + \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$



9.5 Zusammenhang

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

10 Areafunktionen

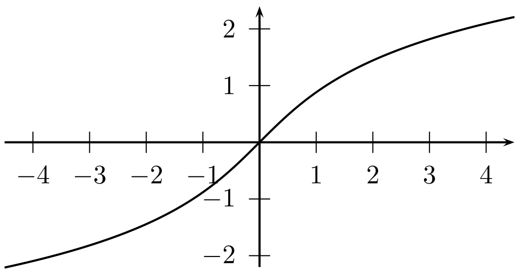
10.1 Area Sinus hyperbolicus

$D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}$

$$\operatorname{arsinh} x = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\int \operatorname{arsinh} x \, \mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2 + 1} + C$$



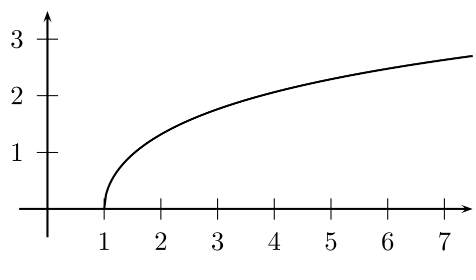
10.2 Area Cosinus hyperbolicus

$D = [1; \infty), W = [0; \infty)$

$$\begin{aligned} \operatorname{arcosh} x &= \cosh^{-1}|_{[0;\infty)}(x) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\int \operatorname{arcosh} x \, \mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2 - 1} + C$$



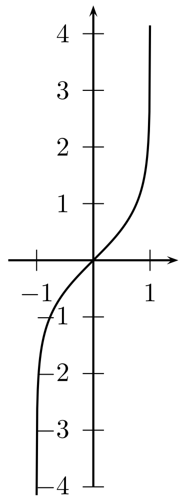
10.3 Area Tangens hyperbolicus

$D = (-1; 1), W = \mathbb{R}$

$$\operatorname{artanh} x = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \operatorname{artanh} x \, \mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{artanh} x + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2)$$



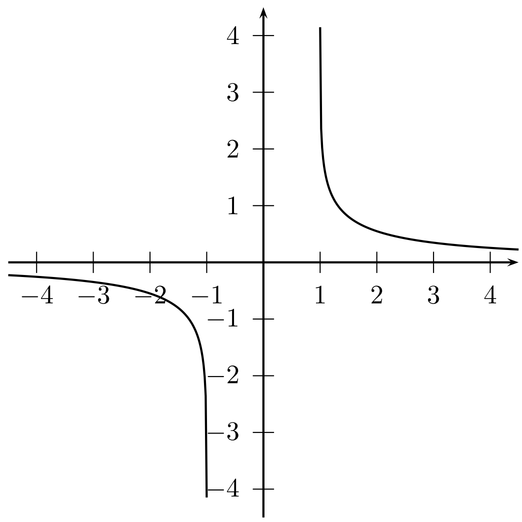
10.4 Area Cotangens hyperbolicus

$D = \mathbb{R} \setminus [-1; 1], W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\operatorname{arcoth} x = \coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}$$

$$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$\int \operatorname{arcoth} x \, \mathrm{d}x = x \cdot \operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1)$$



11 Differenzieren

11.1 Differentiationsregeln

1. Linearität:

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

2. Produktregel:

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$$

3. Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

4. Kettenregel:

$$(g \circ f)' = \underbrace{(g' \circ f)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot f'$$

5. Umkehrfunktion:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

11.2 Satz von Rolle

Sei $f \in C^1[a,b]$ und sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f'(x) = 0$.

11.3 Mittelwertsatz

Sei $f \in C^1[a,b]$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Verallgemeinerung: Seien $f, g \in C^1[a,b]$ und $g'(x) \neq 0$ in $[a,b]$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a,b)$ mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

12 Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich
2. Stetigkeit, Differenzierbarkeit
3. Ableitungen
4. Nullstellen
5. Extrema
6. Wendepunkte
7. Monotonie
8. Krümmung:
   konvex: $f''(x) \geq 0$
   konkav: $f''(x) \leq 0$
9. Asymptoten:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$d = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - kx$$

10. Periodizität, Symmetrie
11. Graph

13 Integrieren

13.1 Integrationsregeln

1. Linearität:
$$\int (f+g)\ \mathrm{d}x = \int f\ \mathrm{d}x + \int g\ \mathrm{d}x$$
$$\int c \cdot f\ \mathrm{d}x = c \cdot \int f\ \mathrm{d}x$$

2. Partielle Integration:
$$\int f' \cdot g\ \mathrm{d}x = f \cdot g - \int f \cdot g'\ \mathrm{d}x$$

3. Substitutionsregel:
$$\int f(y)\ \mathrm{d}y = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x$$
speziell:
$$\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \int f(u)\ \mathrm{d}u \qquad u = ax+b$$

13.2 Standardsubstitutionen

1. $\int \mathrm{R}(\sin u, \cos u)\ \mathrm{d}u$
Substituiere
$$t = \tan\frac{u}{2}.$$
Dann gilt:
$$\begin{aligned} \sin u &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos u &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ u &= 2\arctan t \\ \mathrm{d}u &= \frac{2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

2. $\int \mathrm{R}(x, \sqrt{a^2 \pm x^2})\ \mathrm{d}x$
Substituiere
$$\begin{aligned} x &= a \cdot \sinh u \\ \mathrm{d}x &= a \cdot \cosh u\ \mathrm{d}u \end{aligned}$$
bzw.
$$\begin{aligned} x &= a \cdot \cosh u \\ \mathrm{d}x &= a \cdot \sinh u\ \mathrm{d}u. \end{aligned}$$
Damit erhalten wir $\int \mathrm{R}_1(\sinh u, \cosh u)\ \mathrm{d}u$ und mit $\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ bzw. $\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$ kommen wir zu
$$\mathrm{R}_2(e^u)\ \mathrm{d}u.$$

3. $\int \mathrm{R}(e^u)\ \mathrm{d}u$
Substituiere
$$t = e^u.$$

4. $\int \mathrm{R}(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\ \mathrm{d}x$ kann durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat behandelt werden.

13.3 Partialbruchzerlegung

„Typ 0“: $\int \mathrm{R}(x)\ \mathrm{d}x$ mit
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}$$
Vorgangsweise:

1. Überprüfe $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$. Wenn nicht der Fall: Polynomdivision.

2. Nenner in Nullstellen zerlegen:
$$Q(x) = (x-z_1) \cdot (x-z_2) \cdot \ldots \cdot (x-z_n)$$
Nullstellen zusammenfassen:
$$Q(x) = (x-z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-z_r)^{k_r},$$
wobei die k_i die Vielfachheiten der z_i sind und $k_1 + \ldots + k_r = n$.

3. Ansatz:
$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} =& \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-z_1)} + \ldots \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-z_1)^{k_1}} + \ldots \\ &+ \frac{A_{k_r}^{(r)}}{(x-z_r)} + \ldots \frac{A_{k_r}^{(r)}}{(x-z_r)^{k_r}} \end{aligned}$$

4. Bestimmung der Konstanten:
   - Koeffizientenvergleich
   - Polmethode

5. Integration:
   - Falls reelle Nullstellen:
$$\int \frac{1}{x-a}\ \mathrm{d}x = \ln|x-a|$$
$$\int \frac{1}{(x-a)^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{x-a}$$

6. Falls komplexe Nullstellen: Zusammenfassen zugehöriger konjugiert komplexer Funktionen liefert reelles Ergebnis.

13.4 Bekannte Integrale

$$\int x^q \ \mathrm{d}x = \frac{x^{q+1}}{q+1} + C$$
$$\int \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$
$$\int e^x \ \mathrm{d}x = e^x + C$$
$$\int a^x \ \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \ln x \ \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x + C$$
$$\int \log_a x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} \cdot (x \cdot \ln x - x) + C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}x = \arctan x + C$$
$$\int -\frac{1}{1+x^2} \ \mathrm{d}x = \operatorname{arccot} x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ \mathrm{d}x = \arcsin x + C$$
$$\int -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ \mathrm{d}x = \arccos x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \ \mathrm{d}x = \operatorname{arcosh} x + C$$
$$\int \frac{1}{1-x^2} \ \mathrm{d}x = \operatorname{artanh} x + C$$