Digitale Netze und die Sobol-Folge

Markus Hofer

10. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation und Einführung in (t,m,s)-Netze (Digitale Netze) und (t,s)-Folgen 2

2 Diskrepanzabschätzungen für (t,m,s)-Netze 4

3 Diskrepanzabschätzungen für (t,s)-Folgen 12

4 Konstruktion und Implementation der Sobol Folge 16

Kapitel 1

Motivation und Einführung in (t,m,s)-Netze (Digitale Netze) und (t,s)-Folgen

Bei der Verwendung von Quasi-Monte Carlo Methoden ist es zur Vermeidung eines zu hohen Integrationsfehlers wichtig, dass man Folgen mit niedriger Diskrepanz verwendet. Wir werden sehen, dass (t,s)-Folgen in Bezug auf Diskrepanzen sehr niedrige obere Schranken besitzen. In den weiteren Betrachtungen werden wir zuerst (t,m,s)-Netze und die daraus resultierenden (t,s)-Folgen definieren. Im nächsten Kapitel werden wir dann Diskrepanzabschätzungen von (t,m,s)-Netzen und die dazu gehörenden Beweise sehen. In Kapitel 3 zeigen wir dann Diskrepanzabschätzungen der ersten N Glieder einer (t,s)-Folge. Im abschließenden 4. Kapitel erstellen wir dann Konstruktionsprinzipien für (t,s)-Folgen und gehen dann näher auf die Konstruktion der Sobol-Folge ein.

Definition 1.1: Wir bezeichnen $E = \prod_{i=1}^{s}[a_i b^{-d_i}, (a_i + 1)b^{-d_i})$ mit $a_i, d_i \in Z, d_i \geq 0, 0 \leq a_i \leq b^{d_i}$ für $1 \leq i \leq s$ als elementares Intervall E in Basis b.

Definition 1.2: Seien $0 \leq t \leq m$ ganze Zahlen. Dann ist ein (t,m,s)-Netz in Basis b, eine Menge von Punkten P in I^s für die gilt: A(E;P)= b^t für jedes elementare Intervall E mit $\lambda_s(E) = b^{t-m}$.

Bemerkung 1.1: $\lambda_s(E)$ bezeichne das Lebesque-Maß der s-dimensionalen Menge E.

Bemerkung 1.2: A(E;P) bezeichne die Anzahl der Punkte von P, welche in jedem elementaren E liegen.

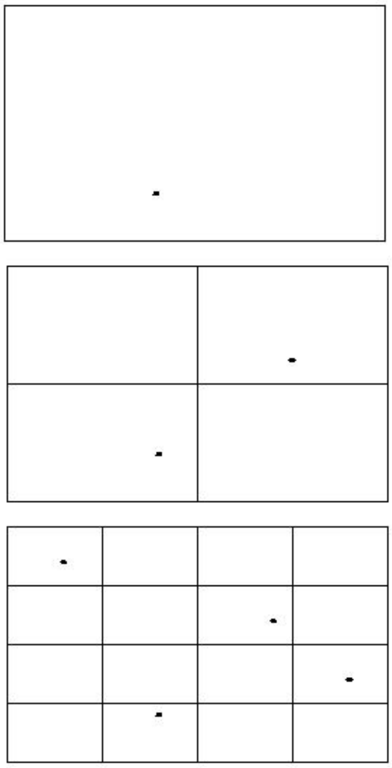
Definition 1.3: Sei $t \geq 0$ eine ganze Zahl. Eine Folge $x_0, x_1, ...$ von Punkte in I^s ist eine (t,s)-Folge in Basis b, wenn für alle ganzen Zahlen $k \geq 0$ und $m > t$, die Punktmenge bestehend aus den x_n mit $k * b^m \leq n < (k+1) * b^m$ ein (t,m,s)-Netz ist.

Bemerkung 1.3: Die Van der Corput-Folge in Basis b ist also eine (0,1)-Folge in Basis b.

Bemerkung 1.4: Da für jedes (t,m,s)-Netz gilt, dass $A(E;P) = b^m \lambda_s(E)$ für alle elementaren Intervalle E mit $\lambda_s(E) \geq b^{t-m}$ folgt, dass jedes (t,m,s)-Netz in Basis b, auch ein (u,m,s)-Netz in Basis b ist für $t \leq u \leq m$ und jede (t,s)-Folge in Basis b ist auch eine (u,s)-Folge in Basis b für $u \geq t$.

Zum Abschluss dieses Kapitels geben wir noch einige Beispiele für (t,m,s)-Netze an. Jeweils ein (0,0,2), ein (0,1,2) und ein (0,2,2)-Netz in alle 3 Fällen ist die Basis b = 2:

Seminar/netze.JPG



Bei der Konstruktion sind die Werte für t,m einfach nur in die Formeln für A(E;P), $\lambda_s(E)$ einzufügen. Das ergibt z.B. im 2.Fall A(E;P)=1, $\lambda_2(E) = 2^{-1}$ und damit ist die Gesamtanzahl der Punkte gleich 2.

Kapitel 2

Diskrepanzabschätzungen für (t,m,s)-Netze

Lemma 2.1: Sei P ein (t,m,s) - Netz in Basis b, sei E ein elementares Intervall in Basis b mit $\lambda_s(E) = b^{-u}$, sei $0 \leq u \leq m - t$ und sei T eine affine Transformation von E auf I^s. Dann werden die Punkte von P in E von T in ein (t,m-u,s)-Netz in Basis b transformiert.

Beweis: Wir wissen, dass $A(E; P) = b^{m-u}$. Durch die Transformation der im Intervall E liegenden Punkte von P bekommen wir eine neue Punktmenge P' mit Kardinalität b^{m-u} in I^s. Im folgenden Beweis bezeichnet Δ_b (t,m,s) die rechte seite der Ungleichung. Um zu zeigen, dass P' ein (t,m-u,s)-Netz in Basis b ist betrachten wir ein elementares Intervall E' in Basis b mit $\lambda_s(E') = b^{t-m+u}$. Für $x \in E$ gilt $T(x) \in E'$, genau dann, wenn $x \in T^{-1}(E')$. $T^{-1}(E')$ ist allerdings ein elementares Intervall in Basis b mit $\lambda_s(T^{-1}(E')) = b^{t-m}$, daraus folgt, dass $A(T^{-1}(E'); P) = b^t$, und desshalb ist $A(E'; P') = b^t$

Satz 2.1: Für die Stern-Diskrepanz eines (t,m,s)-Netzes in Basis $b \geq 3$ gilt,

$$ND_N^*(P) \leq b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \binom{m-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i \tag{2.1}$$

Beweis: Wir definieren $D(J; P) = A(J; P) - N\lambda_s(J)$ für ein Intervall $J \subseteq I^s$, wobei N die Anzahl der Punkte von P ist. Wir fixieren $t \geq 0$ und fahren fort mit einer doppelten Induktion einerseits nach $s \geq 1$ und andererseits nach $m \geq t$. Sei zuerst s=1 und wir wählen ein beliebiges $m \geq t$. Ist ein Intervall $J = [0, u), 0 < u \leq 1$ gegeben, spalten wir es auf in disjunkte Intervalle $J_h = [hb^{t-m}, (h+1)b^{t-m}), h = 0, 1, .., k-1$ und $J_k = [kb^{t-m}, u) für k = \lfloor ub^{t-m} \rfloor$. Für ein (t,m,1)-Netz P in Basis b, gilt $D(J_h; P) = 0$ für $0 \leq h < k$, daraus folgt $D(J; P) = D(J_k; P)$. Wegen $0 \leq A(J_k; P) \leq b^t$ und $0 \leq b^m \lambda_1(J_k) \leq b^t$; folgt $|D(J; P)| \leq b^t$. Damit folgt, dass $ND_N^*(P) \leq b^t = \Delta_b(t, m, 1)$, und damit ist (2.1) für s=1 gezeigt.
Sei jetzt $s \geq 2$ und nehmen wir an, dass (2.1) für s-1 und für alle $m \geq t$ gezeigt ist. Wir zeigen jetzt (2.1) für die Dimension s mit einer Induktion nach $m \geq t$. Wenn $m = t$ dann sieht man, dass $ND_N^*(P) \leq N = b^t = \Delta_b(t, t, s)$ gilt, damit ist $m = t$ alles gezeigt.
Angenommen wir haben (2.1) für m gezeigt und jetzt wollen wir es für ein (t,m+1,s)-Netz zeigen, dazu zeigen wir $|D(J; P)| \leq \Delta_b(t, m+1, s)$ für jedes Intervall $J = \prod_{i=1}^{s} [0, u_i) \subseteq I^s$. Wir machen eine Fallunterscheidung bzgl. des Wertes von u_s. Wenn $u_s = 1$ wenden wir auf P die Projektion $T : I^s \to I^{s-1}$ definiert durch $T(v_1, .., vs) = (v_1, .., v_{s-1})$ für $(v_1, .., v_s) \in I^s$ an. Das transformiert P in ein (t,m+1,s-1)-Netz P_1 in Basis b. Es gilt $D(J; P) = D(T(J); P_1)$,

daraus folgt aus der Induktionsannahme

$$|D(J;P)| \leq \Delta_b(t, m+1, s-1). \tag{2.2}$$

Da auch $\Delta_b(t, m+1, s-1) \leq \Delta_b(t, m+1, s)$ gilt, folgt (2.1) für den Fall $u_s = 1$.
Sei jetzt $u_s \leq 1$, sei $l = \lfloor bu_s \rfloor$, womit $0 \leq l \leq b-1$ gilt. Als nächstes, betrachten wir den Fall $0 \leq l \leq \lfloor b/2 \rfloor$. Dazu spalten wir J in disjunkte Intervalle in $J_h = \prod_{i=1}^{s-1}[0, u_i) \times [\frac{h}{b}, \frac{h+1}{b})$ für $h = 0, 1, .., l-1$ und $J_l = \prod_{i=1}^{s-1}[0, u_i) \times [\frac{l}{b}, u_s)$ auf. Dann gilt

$$D(J;P) = \sum_{h=0}^{l} D(J_h, P). \tag{2.3}$$

Sei $E_l = [0,1)^{s-1} \times [\frac{l}{b}, \frac{l+1}{b})$ und sei T_l eine affine Transformation von E_l nach I^s. Aus dem Lemma vorher folgt, dass T_l transformiert die Punkte von P welche in E_l liegen, in ein (t,m,s) - Netz P_2 in Basis b. Daraus folgt: $D(J_l;P) = D(T_l(J_l);P_2)$ und mit der Induktionsannahme folgt:

$$|D(J_l;P)| \leq \Delta_b(t, m, s) \tag{2.4}$$

. Für $0 \leq h < l$, transformiert die Projektion $T : I^s \rightarrow I^{s-1}$, T wie im Fall $u_s = 1$, die Punkte von P, welche in $E_h = [0,1)^{s-1} \times [\frac{h}{b}, \frac{h+1}{b})$ in ein (t,m,s-1)-Netz $P_3^{(h)}$ in Basis b. Damit, $D(J_h;P) = D(T(J_h);P_3^{(h)})$ und somit folgt mit der Induktionsannahme,

$$|D(J_h;P)| \leq \Delta_b(t, m, s-1) \tag{2.5}$$

für $0 \leq h < l$. Kombinieren wir nun die Ergebnisse (2.3), (2.4) und (2.5), erhalten wir:

$$|D(J;P)| \leq \Delta_b(t, m, s) + \lfloor b/2 \rfloor \, \Delta_b(t, m, s-1). \tag{2.6}$$

Und weiter,

$$|D(J;P)| \leq b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \binom{m-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i + b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-2}{i-1} \binom{m-t}{i-1} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i$$

$$\leq b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \binom{m-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i = b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i} \binom{m+1-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i = \Delta_b(t, m+1, s)$$

und damit ist (2.2) gezeigt.
Schließlich, betrachten wir den Fall, dass $\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + 1 \leq lb - 1$. Wir betrachten J als die mengentheoretische Differenz der Intervalle $L = \prod_{i=1}^{s-1}[0, u_i) \times [0,1)$ und $M = \prod_{i=1}^{s-1}[0, u_i) \times [u_s, 1)$, und wir spalten M auf in disjunkte Intervalle $M_l = \prod_{i=1}^{s-1}[0, u_i) \times [u_s, \frac{l+1}{b})$,$M_h = \prod_{i=1}^{s-1}[0.u_i) \times [\frac{h}{b}, \frac{h+1}{b})$ für $h = l+1, l+2, .., b-1$. Damit haben wir,

$$D(J;P) = D(J;P) - \sum_{h=l}^{b-1} D(M_h;P) \tag{2.7}$$

. Von oben wissen wir, $|D(L;P)| \leq \Delta_b(t, m+1, s-1)$. Das Intervall M_l kann man gleich behandeln wie das Intervall J_l in (2.4), daraus folgt $|D(M_l;P)| \leq \Delta_b(t, m, s)$, und für $l < h \leq b-1$, erhalten wir wie in (2.5), $|D(M_h;P) \leq \Delta_b(t, m, s-1)$. Zusammen mit (2.7) erhalten wir,

$$|D(J;P)| \leq \Delta_b(t, m+1, s-1) + \Delta_b(t, m, s) + (b - \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 2)\Delta_b(t, m, s-1) \tag{2.8}$$

.
Damit

$$|D(J;P)|$$

$$\leq b^t \sum_{i=0}^{s-2} \binom{s-2}{i}\binom{m+1-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i + b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i}\binom{m-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i + \left(\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor - 1\right) b^t \sum_{i=0}^{s-2} \binom{s-2}{i}\binom{m-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i$$

$$= b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-2}{i}\binom{m-t}{i-1} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i + b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-2}{i-1}\binom{m-t}{i-1} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i + b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i}\binom{m-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i$$

$$= b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{s-1}{i}\binom{m+1-t}{i} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^i = \Delta_b(t, m+1, s),$$

und damit haben wir den Satz für alle Fälle gezeigt.

Satz 2.2: Für die Stern Diskrepanz eines (t,m,s)-Netzes P einer beliebigen Basis b gilt,

$$ND_N^*(P) \leq b^t \sum_{i=0}^{s-1} \binom{m-t}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i + (\frac{b}{2}-1) b^t \sum_{i=0}^{s-2} \binom{m-t+i+1}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i. \tag{2.9}$$

Beweis: Wir bezeichnen die rechte Seite von (2.9) als $b^t E(m,s)$, wobei wir die Abhängigkeit von b und t in E(m,s) der Einfachheit halber vernachlässigen. Betrachten wir den Beweis des vorigen Satzes, sehen wir, dass es reicht ein Analogon zu (2.2) zu beweisen. Es reicht also die Ungleichungen

$$E(m,s) + \frac{b}{2} E(m, s-1) \leq E(m+1, s) \tag{2.10}$$

und

$$E(m+1, s-1) + E(m,s) + \left(\frac{b}{2} - 2\right) E(m, s-1) \leq E(m+1, s) \tag{2.11}$$

für $s \geq 2$ und $m \geq t$ zu beweisen.

$$E(m,s) + \frac{b}{2} E(m,s-1) \leq \sum_{i=0}^{s-1} \binom{m-t}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i + \sum_{i=0}^{s-1} \binom{m-t}{i-1} \left(\frac{b}{2}\right)^i$$

$$+ (\frac{b}{2}-1) \sum_{i=0}^{s-2} \binom{m-t+i+1}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i + (\frac{b}{2}-1) \sum_{i=0}^{s-2} \binom{m-t+i+1}{i-1} \left(\frac{b}{2}\right)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \binom{m+1-t}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i + \left(\frac{b}{2}-1\right) \sum_{i=0}^{s-2} \binom{m-t+i+2}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i = E(m+1, s),$$

und damit ist (2.10) bewiesen. Da wir b beliebig gewählt haben bemerken wir, dass es so den

Fall $\lfloor b/2+1 \leq l \leq b-1 \rfloor$,analog wie im Satz zuvor, für b=2 nicht gibt, im weiteren nehmen wir $b \geq 4$ an. Wir schreiben

$$E(m,s) = F(m,s) + \left(\frac{b}{2} - 1\right) G(m,s) \tag{2.12}$$

mit

$$F(m,s) = \sum_{i=0}^{s-1} \binom{m-t}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i$$

,

$$G(m,s) = \sum_{i=0}^{s-2} \binom{m-t+i+1}{i} \left(\frac{b}{2}\right).$$

Damit

$$F(m+1,s-1) + F(m,s) + \left(\frac{b}{2} - 1\right) F(m,s-1)$$

$$= \sum_{i=0}^{s-1} \binom{m+1-t}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i + \sum_{i=0}^{s-2} \left(\binom{m+1-t}{i} - 2\binom{m-t}{i}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^i$$

$$= F(m+1,s) + \sum_{i=0}^{s-2} \left(\binom{m-t}{i-1} - \binom{m-t}{i}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^i.$$

Weiters

$$G(m+1,s-1) + G(m,s) + \left(\frac{b}{2} - 2\right) G(m,s-1)$$

$$= G(m+1,s) - \binom{m-t+i}{i-1} \left(\frac{b}{2}\right)^{s-2} + \binom{m-t+s-1}{s-2} \left(\frac{b}{2}\right)^{s-2}$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-2} \binom{m-t+i}{i-1} \left(\frac{b}{2}\right)^i - \sum_{i=0}^{s-3} \binom{m-t+i+1}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i$$

$$= G(m+1,s) - \binom{m-t+s-2}{s-4} \left(\frac{b}{2}\right)^{s-2} - \sum_{i=0}^{s-3} \binom{m-t+i}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i.$$

Mit (2.12) ergibt sich

$$E(m+1,s-1) + E(m,s) + \left(\frac{b}{2} - 2\right) E(m,s-1) = E(m+1,s)$$

$$+ \sum_{i=0}^{s-2} \left(\binom{m-t}{i-1} - \binom{m-t}{i}\right) \left(\frac{b}{2}\right)^i - \binom{m-t+s-2}{s-4} \left(\frac{b}{2} - 1\right) \left(\frac{b}{2}\right)^{s-2}$$

$$- \left(\frac{b}{2} - 1\right) \sum_{i=0}^{s-3} \binom{m-t+i}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i .$$

Um (2.11) zu beweisen, ist noch zu zeigen, dass

$$\sum_{i=0}^{s-2} \left(\binom{m-t}{i-1} - \binom{m-t}{i} \right) \left(\frac{b}{2}\right)^i \leq \binom{m-t+s-2}{s-4} \left(\frac{b}{2} - 1\right) \left(\frac{b}{2}\right)^{s-2} + \left(\frac{b}{2} - 1\right) \sum_{i=0}^{s-3} \binom{m-t+i}{i} \left(\frac{b}{2}\right)^i . \tag{2.13}$$

Für $s = 2$ und $s = 3$, ist es einfach die Ungleichung zu verifizieren. Für $s \geq 4$, beweisen wir, dass für $0 \leq i \leq s-2$, der Koeffizient von $(b/2)^i$ auf der linken Seite den entsprechenden Koeffizienten auf der rechten Seite von (2.13) nicht übersteigt. Das ist trivial für $i = 0$. Für $1 \leq i \leq s-3$, haben wir

$$\binom{m-t}{i-1} - \binom{m-t}{i} \leq \binom{m-t}{i-1} \leq \binom{m-t+i-1}{i-1} \leq \binom{m-t+i}{i}$$

$$\leq \left(\frac{b}{2} - 1\right) \binom{m-t+i}{i}.$$

Für $i = s-2$, haben wir zu zeigen, dass

$$\binom{m-t}{s-3} - \binom{m-t}{s-2} \leq \binom{m-t+s-2}{s-4} \left(\frac{b}{2} - 1\right)$$

Das ist trivial für $m = t$, und für $m \geq t+1$, erhalten wir

$$\binom{m-t}{s-3} - \binom{m-t}{s-2} = \binom{m-t-1}{s-4} - \binom{m-t-1}{s-2} \leq \binom{m-t-1}{s-4}$$

$$\leq \binom{m-t+s-2}{s-4} \left(\frac{b}{2} - 1\right),$$

somit ist (2.13) für alle Fälle gezeigt.

Wenn man die Schranken in (2.1) und (2.9) in der Termen bzgl. der Ordnung von m-t ausdrückt, mit $m > t$, kann man sie in der Form

$$ND_N^*(P) \leq \frac{b^t}{(s-1)!} \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor^{s-1} (m-t)^{s-1} + O(b^t (m-t)^{s-2})$$

Da die Anzahl $N = b^m$ von Punkten in einem (t,m,s)-Netz ist können wir den Ausdruck für $m > 0$ schreiben als,

$$ND_N^*(P) \leq \frac{b^t}{(s-1)!} \left(\frac{\lfloor b/2 \rfloor}{log(b)} \right)^{s-1} (log(N))^{s-1} + O(b^t (log(N))^{s-2})$$

Betrachten wir jetzt nur die Fälle $s = 2, 3, 4$.

Satz 2.3: Für $s = 2$, gilt für die Stern Diskrepanz eines (t,m,s) - Netzes P in Basis b

$$ND_N^*(P) \leq \left\lfloor \frac{b-1}{2}(m-t) + \frac{3}{2} \right\rfloor b^t.$$

Beweis: Wir schreiben $D(J;P) = A(J;P) - b^m \lambda_2(J)$ für ein Intervall $J \subseteq I^s$. Sei nun $J = [0,u) \times [0,v) \subseteq I^2$. Wir schreiben $u = \sum_{j=1}^{\infty} u_j b^{-j}$ mit $u_j \in Z_b$ für alle $j \geq 1$, und setzen wir $r = m - t$ und $d = \sum_{j=1}^{r} u_j$. Dann kann $[0, \sum_{j=1}^{r} u_j b^{-j}$ dargestellt werden als eine disjunkte Vereinigung von u_1 elementaren Intervallen in Basis b mit Länge b^{-1}, von u_2 elementaren Intervallen in Basis b mit Länge b^{-2} und so weiter. Wir haben also eine Darstellung mit d elementaren Intervallen $E_1, .., E_d$ in Basis b. Mit $F = [\sum_{j=1}^{r} u_j b^{-j}, u)$ erhalten wir,

$$|D(J;P)| \leq \sum_{h=1}^{d} |D(E_h \times [0,v);P)| + |D(F \times [0,v);P)|. \tag{2.14}$$

Sei nun K ein beliebiges 2-dimensionales Intervall, welches in einigen 2-dimensionalen elementaren Intervallen in Basis b mit Fläche b^{-r} enthalten ist. Dann gilt $0 \leq A(K;P) \leq b^t$ und $0 \leq b^m \lambda_2(K) \leq b^t$, damit gilt

$$|D(K;P)| \leq b^t. \tag{2.15}$$

Als Nächstes, bemerken wir, dass für jedes elementare Intervall E in Basis b gilt

$$|D(E \times [0,v);P)| \leq b^t. \tag{2.16}$$

Wenn $\lambda_1(E) \leq b^{-r}$, folgt (2.16) aus (2.15). Sonst gilt $\lambda_1(E) = b^{-a}$ für eine $a \in Z$ mit $0 \leq a < r$. In diesem Fall, spalten wir $[0,v)$ in eindiemsionale elementare Intervalle in Basis b der Länge b^{a-r} und einem zusätzlichen Intervall F_1 mit Länge $< b^{a-r}$. Aus Bemerkung (1.1) folgt, dass $D(E \times [0,v);P) = D(E \times F_1;P)$. Außerdem ist $E \times F_1$ enthalten in einem 2-dimensionalen elementaren Intervall in Basis b mit Fläche b^{-r} und damit folgt (2.16) aus (2.15).
Wir bemerken, dass $F \times [0,v)$ in einem 2-dimensionalen elementaren Intervall in Basis b mit Fläche b^{-r} enthalten ist. damit folgt aus (2.14), (2.15) und (2.16), dass

$$|D(J;P)| \leq (d+1)b^t \tag{2.17}$$

Sei nun $L = [u,1) \times [0,v)$. Wenn wir das Intervall $[u,1)$ auf dieselbe Art behandeln wie $[0,u)$ am Beginn des Beweises, sehen wir, dass $[u,1)$ dargestellt werden kann als isjunkte Vereinigung von $(b-1)r - d$ eindimensionalen elementaren Intervallen in Basis b und einem Intervall, welches in einem eindimensionalen elementaren Intervall in Basis b mit Länge b^{-r} enthalten ist. Folglich, mit dem Argument das zu (2.17) führte, erhalten wir

$$|D(J;P)| \leq ((b-1)r - d + 1)b^t.$$

Weiters,

$$D(J;P) = D([0,1) \times [0,v);P) - D(L;P),$$

und, zusammen mit (2.16) ergibt das,

$$|D(J;P)| \leq ((b-1)r - d + 2)b^t. \tag{2.18}$$

Es folgt, dass $|D(J;P)|$ durch das Minimum der rechten Seite von (2.17) und (2.18) begrenzt ist. Maximieren wir über $0 \leq d \leq (b-i)r$, erhalten wir genau die Aussage des Beweises.

Satz 2.4: Für $s = 3$ und ein (t,m,s)-Netz P gilt die Abschätzung

$$ND_N^*(P) \leq \left\lfloor \left(\frac{b-1}{2}\right)^2 (m-t)^2 + \frac{b-1}{2}(m-t) + \frac{9}{4} \right\rfloor b^t.$$

Beweis: Siehe [4].

Satz 2.5: Für $s = 4$ und ein (t,m,s)-Netz P gilt die Abschätzung

$$ND_N^*(P) \leq \left\lfloor \left(\frac{b-1}{2}\right)^3 (m-t)^3 + \frac{3}{8}(b-1)^2(m-t)^2 + \frac{3}{8}(b-1)(m-t) + \frac{15}{4} \right\rfloor b^t.$$

Beweis: Siehe [4].

Die bisherigen Sätze führen, wenn man sie kombiniert zu folgendem Satz:

Satz 2.6: Für ein (t,m,s)-Netz P in Basis b mit $m > 0$ gilt folgende Abschätzung

$$ND_N^*(P) \leq B(s,b)b^t(log(N))^{s-1} + O(b^t(log(N))^{s-2}),$$

wobei hier für s = 2 oder b = 2 und s = 3,4 gilt

$$B(s,b) = \left(\frac{b-1}{2log(b)}\right)^{s-1}$$

sonst gilt

$$B(s,b) = \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{\lfloor b/2 \rfloor}{log(b)}\right)^{s-1}.$$

Betrachten wir nun die Diskrepanzabschätzung für ein Netz das durch die Halton-Folge entstanden ist:

$$ND_N^*(P) \leq A_{s-1}(log(N))^{s-1} + O((log(N))^{s-2})$$

wobei gilt

$$s \overset{lim}{\rightarrow} \infty \ \frac{log(A_s)}{s * log(s)} = 1$$

damit steigt A_s überexponential mit zunehmendem s und macht die Halton-Folge für hohe Dimensionen unbrauchbar. Dieses Problem haben wir bei (t,m,s)-Netzen nicht mehr, denn B(s,b) ist zwar für kleine s schlechter als A_s, geht aber für große s gegen 0.

Kapitel 3

Diskrepanzabschätzungen für (t,s)-Folgen

im Folgenden bezeichnet $\Delta_b(t,m,s)$ eine Zahl für die $ND_N^*(P) \leq \Delta_b(t,m,s)$ für jedes (t,m,s)-Netz P in Basis b gilt.

Lemma 3.1: Für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Glieder einer (t,s)-Folge in Basis b gilt,

$$ND_N^*(S) \leq \frac{b-1}{2}\sum_{m=t}^{k}\Delta_b(t,m,s) + \frac{1}{2}\Delta_b(t,k+1,s) + \frac{1}{2}max(b^t, \Delta_b(t,r,s))$$

, für $N \geq b^t$, wobei k die größte ganze Zahl ist, mit $b^k \leq N$, wobei b^r die größte Potenz von b ist welche N teilt, und wir setzen $\Delta_b(t,r,s) = 0$, wenn $r < t$.

Beweis: Sei $x_0, x_1, ..$ eine (t,s) - Folge in Basis b. Für $N \geq b^t$ sei $N = \sum_{m=0}^{k} a_m b^m$ die Darstellung in Basis b, so dass alle $a_m \in Z_b$, $a_k \neq 0$ und $k \geq t$. Wir spalten die Punktemenge $x_0, x_1, .., x_{N-1}$ in Punktemengen P_m auf, wobei P_k aus den x_k mit $0 \leq n < a_k b^k$ besteht, und für $0 \leq m \leq k-1$, besteht P_n aus den x_n mit $\sum_{h=m+1}^{k} a_h b^h \leq n < \sum_{h=m}^{k} a_h b^h$. Die P_m mit $a_m \neq 0$ sind nichtleer und nach der Definition von (t,s) - Folgen in Basis b kann man sie aufspalten in a_m (t,m,s) - Netze in Basis b mit $m \geq t$. Deshalb gilt

$$ND_N^*(S) \leq \sum_{m=t}^{k} a_m \Delta_b(t,m,s) + \sum_{m=0}^{t-1} a_m b^m. \tag{3.1}$$

Nun wenden wir dieselbe Methode auf die Punktemenge die aus den x_n mit $N \leq n < b^{k+1}$ besteht an. Diese Menge hat

$$b^{k+1} - N = \sum_{m=0}^{k} c_m b^m$$

Punkte wobei die rechte Seite die Ziffernentwicklung in Basis b ist. Verwenden wir die Tatsache, dass die Punktemenge bestehend aus den x_n mit $0 \leq n < b^{k+1}$ ein (t,k+1,s)-Netz formt, erhalten wir

$$ND_N^*(S) \leq \Delta_b(t,k+1,s) + \sum_{m=t}^{k} c_m \Delta_b(t,m,s) + \sum_{m=0}^{t-1} c_m b^m. \tag{3.2}$$

Addieren wir (3.1) und (3.2) und dividieren wir durch 2,

$$ND_N^*(S) \le \frac{1}{2}\sum_{m=t}^{k}(a_m+c_m)\Delta_b(t,m,s) + \frac{1}{2}\Delta_b(t,k+1,s) + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{t-1}(a_m+c_m)b^m. \tag{3.3}$$

Aus der Definition von r folgt, dass $a_m = c_m = 0$ für $0 \le m < r$, $a_r + c_r = b$, und $a_m + c_m = b-1$ für $r < m \le k$. Wenn $r \le t-1$, dann ergibt (3.3)

$$ND_N^*(S) \le \frac{b-1}{2}\sum_{m=t}^{k}\Delta_b(t,m,s) + \frac{1}{2}\Delta_b(t,k+1,s)$$

$$\le \frac{b-1}{2}\sum_{m=t}^{k}\Delta_b(t,m,s) + \frac{1}{2}\Delta_b(t,r,s) + \frac{1}{2}\Delta_b(t,k+1,s),$$

und damit folgt das Lemma.

Satz 3.1: Für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Glieder einer (t,s)-Folge S in Basis $b \ge 3$ gilt

$$ND_N^*(S) \le \frac{b-1}{2}b^t\sum_{i=1}^{s}\binom{s-1}{i-1}\binom{k+1-t}{i}\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor^{i-1}$$

$$+\frac{1}{2}b^t\sum_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}\left(\binom{k+1-t}{i}+\binom{k-t}{i}\right)\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor^{i}$$

für $N \ge b^t$, wobei k die größte ganze Zahl mit $b^k \le N$ ist.

Beweis: Nach (2.1) gilt

$$\Delta_b(t,m,s) = b^t\sum_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}\binom{m-t}{i}\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor^{i}.$$

Für $N \ge b^t$, gilt $k \ge t$, und man sieht, dass für die Zahl r in Lemma (3.1), $r \le k$ gilt. Wir erhalten dann

$$ND_N^*(S) \le \frac{b-1}{2}b^t\sum_{i=0}^{s-1}\binom{s-1}{i}\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor^{i}\sum_{m=0}^{k-t}\binom{m}{i} + \frac{1}{2}\Delta_b(t,k+1,s) + \frac{1}{2}\Delta_b(t,k,s).$$

Mit einer Induktion nach M ergibt sich

$$\sum_{m=0}^{M}\binom{m}{i} = \binom{M+1}{i+1} \tag{3.4}$$

für alle $M \ge 0$ und $i \ge 0$, und damit ergibt sich der Satz.

Satz 3.2: Für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Glieder einer (t,s)-Folge S in einer beliebigen Basis b gilt

$$ND_N^*(S) \leq (b-1)b^{t-1}\sum_{i=1}^{s}\binom{k+1-t}{i}\left(\frac{b}{2}\right)^i$$

$$+\binom{b-1}{2}b^{t-1}\sum_{i=1}^{s-1}\binom{k+i+1-t}{i}\left(\frac{b}{2}\right)^i+\frac{1}{2}b^t\sum_{i=0}^{s-1}\left(\binom{k+1-t}{i}+\binom{k-t}{i}\right)\left(\frac{b}{2}\right)^i$$

$$+\frac{b-2}{4}b^t\sum_{i=0}^{s-2}\left(\binom{k+i+2-t}{i}+\binom{k+i+1-t}{i}\right)\left(\frac{b}{2}\right)^i$$

für $N \geq b^t$, wobei k die größte ganze Zahl mit $b^k \leq N$ ist.

Beweis: Wir verwenden das Lemma (3.1) mit dem Ergebnis von Satz (2.1):

$$\Delta_b(t,m,s) = b^t\sum_{i=0}^{s-1}\binom{m-t}{i}\left(\frac{b}{2}\right)^i+\left(\frac{b}{2}-1\right)b^t\sum_{i=0}^{s-2}\binom{m-t+i+1}{i}\left(\frac{b}{2}\right)^i.$$

Verfahren wir gleich wie im vorherigen Beweis erhalten wir,

$$ND_N^*(S) \leq \frac{b-1}{2}b^t\sum_{i=0}^{s-1}\left(\frac{b}{2}\right)^i\sum_{m=0}^{k-t}\binom{m}{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{b-1}{2}\right)b^t\sum_{i=0}^{s-2}\left(\frac{b}{2}\right)^i\sum_{m=0}^{k-t}\binom{m+i+1}{i}$$

$$+\frac{1}{2}\Delta_b(t,k+1,s)+\frac{1}{2}\Delta_b(t,k,s).$$

für $N \geq b^t$. Wie bei (3.4) erhalten wir

$$\sum_{m=0}^{k-t}\binom{m}{i}=\binom{k+1-t}{i+1}$$

und

$$\sum_{m=0}^{k-t}\binom{m+i+1}{i}=\sum_{m=i+1}^{k+i+1-t}\binom{m}{i}<\sum_{m=0}^{k+i+1-t}\binom{m}{i}=\binom{k+i+2-t}{i+1}.$$

und damit haben wir das gewünschte Resultat.
Nun führen wir noch 2 Ergebnisse für Diskrepanzabschätzungen an die nur für fix gewählte Dimensionen gelten.

Satz 3.3: Sei $s=2$, dann gilt für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Gleider einer (t,s)-Folge S in Basis b

$$ND_N^*(S) \leq \frac{1}{8}(b-1)^2b^t(k-t)^2+\frac{1}{8}(b-1)(b+9)b^t(k-t)+\frac{3}{4}(b+1)b^t$$

für $N \geq b^t$, wobei k die größte ganze Zahl mit $b^t \leq N$ ist.

Beweis: Siehe [4].

Satz 3.4: Sei $s = 3$, dann gilt für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Gleider einer (t,s)-Folge S in Basis b

$$ND_N^*(S) \leq \frac{1}{24}(b-1)^3 b^t (k-t)^3 + \frac{1}{16}(b-1)^2(b+5)b^t(k-t)^2$$

$$+\frac{1}{48}(b-1)(b^2+16b+61)b^t(k-t) + \frac{1}{8}(b^2+4b+13)b^t$$

für $N \geq b^t$, wobei k die größte ganze Zahl mit $b^k \leq N$ ist.

Beweis: Siehe [4].

Satz 3.5: Sei $s = 4$, dann gilt für die Stern Diskrepanz $D_N^*(S)$ der ersten N Gleider einer (t,s)-Folge S in Basis b

$$ND_N^*(S) \leq \frac{1}{64}(b-1)^4 b^t (k-t)^4 + \frac{1}{32}(b-1)^3(b+5)b^t(k-t)^3$$

$$+\frac{1}{64}(b-1)^2(b^2+16b+13)b^t(k-t)^2 + \frac{1}{32}(b-1)(7b^2+b+64)b^t(k-t) + \frac{1}{16}(b^3+8b+51)b^t$$

für $N \geq b^t$, wobei k die größte ganze Zahl mit $b^k \leq N$ ist.

Beweis: Siehe [4].
Die vorherigen Sätze führen zu folgendem Resultat:

Satz 3.6: Für die ersten N Glieder einer (t,s)-Folge S in Basis b gilt

$$ND_N^*(S) \leq C(s,b)b^t(log(N))^s + O(b^t(log(N))^{s-1})$$

für $N \geq 2$, wobei für s = 2 oder b = 2 und s = 3,4 gilt

$$C(s,b) = \frac{1}{s}\left(\frac{b-1}{2log(b)}\right)^s$$

sonst gilt

$$C(s,b) = \frac{1}{s!}\frac{b-1}{2\lfloor b/2 \rfloor}\left(\frac{\lfloor b/2 \rfloor}{log(b)}\right)^s.$$

Auch dieses Ergebnis können wir wieder mit der Halton-Folge vergleichen. Für die gilt

$$ND_N^*(S) \leq A_s(log(N))^s + O((log(N))^{s-1})$$

für alle $N \geq 2$ wobei A_s wieder überexponentiell mit s ansteigt. Auch hier haben (t,s)-Folgen einen Vorteil gegenüber der Halton-Folge für höhere Dimensionen.

Kapitel 4

Konstruktion und Implementation der Sobol Folge

Zuerst beschreiben wir die allgemeinen Prinzipien zur Konstruktion von (t,s)-Folgen, zu welchen auch die Sobol Folge gehört. Sei die Basis $b \geq 2$, $s \geq 1$ und $B = 0, 1, ..b-1$. Wir wählen

- einen kommutativen Ring mit 1 R und mit $Kard(R) = b$;
- Bijektionen $\psi_r : B \to R$ für $r = 1, 2, ..$ mit $\psi_r(0) = 0$ für alle suffizient hohe r;
- Bijektionen $\lambda_{ij} : R \to B$ für $1 \leq i \leq s$ und $j = 1, 2, ..$ mit $\lambda_{ij}(0) = 0$ für $1 \leq i \leq s$ und alle suffizient hohe j;
- Elemente $c_{jr}^{(i)} \in R$ für $1 \leq i \leq s$, $1 \leq j$, und $1 \leq r$.

Die Niederreiter Konstruktion funktioniert wie folgt:

Definition 4.1: Für $1 \leq i \leq k$ und $0 \leq n$, definieren wir die i-te Koordinate des Punktes P_n als

$$P_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{\infty} x_{nj}^{(i)} b^{-j},$$

wobei

$$x_{nj}^{(i)} = \lambda_{ij} \left(\sum_{r=1}^{\infty} c_{jr}^{(i)} \psi_r(a_r(n)) \right),$$

für $1 \leq j$. Mit $n = \sum_{r=1}^{\infty} a_r(n) b^{r-1}$ ist die Ziffernentwicklung von n zur Basis b.

Wir nennen die Matrix $C^{(i)} = (c_{jr}^{(i)})_{1 \leq j,r}$ die Generatormatrix der i-ten Koordinate der (t,s)-Folge. Wählen wir die Basis b als Primzahl, wird aus R in den Konstruktionsprinzipien den endlichen Körper GF(b). Sei

$$c_m^{(i)}(l) = \left(c_{m,1}^{(i)}, .., c_{m,l}^{(i)} \right) \in GF(b)^l,$$

und sei

$$C(d_1, ..d_k; l) = \{ c_m^{(i)}(l) | 1 \leq m \leq d_i, 1 \leq i \leq k \}.$$

Wir definieren $\rho(C;l)$ als die maximale ganze Zahl d, sodass $C(d_1,..,d_k;l)$ ist linear unabhängig über GF(b) für alle nichtnegativen ganzen Zahlen $d_1,..,d_k$, welche $\sum_{1\leq i\leq k} d_i = d$.

Satz 4.1: Sei b eine Primzahl und sei $R = GF(b)$. Wenn für eine ganze Zahl $t \geq 0$

$$t \geq l - \rho(C;l)$$

für jede ganze Zahl $l > t$, ist die Folge die in der vorigen Definition gegeben ist eine (t,s)-Folge in Basis b.

Beweis: Siehe [4]

Diese Resultat zeigt, dass es bei der Konstruktion von Folgen mit niedriger Diskrepanz entscheident ist, Generatormatrizen $C^{(i)}$ zu konstruieren, sodass $\rho(C;l)$ so groß wie möglich ist. Wir beschreiben jetzt wie man solche Generatormatrizen am Besten konstruiert. Es gibt eine Annäherung mithilfe der Laurent - Serienentwicklung über endlichen Körpern. Sei $S(z) \in GF(b,z)$

$$S(z) = \sum_{j=w}^{\infty} a_j z^{-j}$$

wobei alle $a_j \in GF(b)$ und w eine beliebige ganze Zahl ist. Ab hier verwenden wir folgende Notation: $[S(z)]$ bezeichnet den polynomiellen Teil von $S(z) \in GF(b,z)$ und $[S(z)]_{p(z)} = [S(z)]$ (mod p(z)) mit $0 \leq deg([S(z)]_{p(z)}) < deg(p(z))$.
Seien die Polynome $p_1(z),..,p_k(z) \in GF(b,z)$ paarweise relativ prim und sei $e_i = deg(p_i) \geq 1$ für $1 \leq i \leq k$. Für $m \geq 1, 1 \leq i \leq k$, und $j \geq 1$, betrachten wir die Entwicklung

$$\frac{y_{im}(z)}{p_i(z)^j} = \sum_{r=w}^{\infty} a^{(i)}(j,m,r) z^{-r},$$

durch welche die Elemente $a^{(i)}(j,m,r) \in GF(b)$ bestimmt werden. In diesem Fall hängt $w \leq 0$ von i,j,m ab und jedes $y_{im}(z)$ ist ein Polynom, welches so bestimmt ist, dass die Restpolynome $[y_{im}(z)]_{p_i(z)}, (j-1)e_i \leq m-1 < je_i$ unabhängig über $GF(b)$ für jedes $j > 0$ und $i \leq k$ sind. Damit definieren wir

$$c_{mr}^{(i)} = a^{(i)}(m_i + 1, m, r), \tag{4.1}$$

für $1 \leq i \leq k, m \geq 1$, und $r \geq 1$, wobei $m_i = [(m-1)/e_i]$.

Bemerkung 4.1: Die van der Corput-Folge ist äquivalent zu einer allgemeinen Niederreiter-Folge, sodass k=1; b=2; alle Bijektionen λ_{ij}, ψ_r sind identische Abbildungen; $p_1(z) = z$; und alle $y_{1m}(z) = 1$

Bemerkung 4.2: Sobol-Folgen sind äquivalent zu allgemeinen NiederreiterFolgen in Basis b=2, sodass alle Bijektionen λ_{ij}, ψ_r identische Abbildungen sind; $p_1(z) = z$ und für $i = 2,..,k$ ist $p_i(z)$ das (i-1)-te primitive Polynom in der Liste aller primitiven Polynome sortiert nach nichtfallenden Graden; $y_{im}(z) = y_{ih}(z)$, wobei $h = |m-1|_{e_i} + 1$ und $deg(y_{ih}) = e_i - h$.

Lemma 4.1: Seien die Element $c_{mr}^{(i)} \in GF(b)$ gegeben wie in (4.1). Dann sind für jede ganze

Zahl $l > \sum_{i=1}^{k}(e_i - 1)$ und alle ganzen Zahlen $d_1, .., d_k \geq 0$ mit

$$1 \leq \sum_{i=1}^{k} d_i \leq l - \sum_{i=1}^{k}(e_i - 1),$$

die Vektoren

$$c_m^{(i)}(l) = (c_{m,1}^{(i)}, .., c_{m,l}^{(i)}) \in GF(b)^l, \tag{4.2}$$

$1 \leq m \leq d_i, 1 \leq i \leq k$ sind linear unaabhängig über GF(b).

Beweis: Nehmen wir an, dass die Vektoren in (4.2) linear abhängig sind und daher

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{d_i} f_m^{(i)} c_m^{(i)}(l) = 0 \in GF(b)^l$$

mit alle $f_m^{(i)} \in GF(b)$ erfüllen.
Man kann dies umschreiben als

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{d_i} f_m^{(i)} a^{(i)}(m_i + 1, m, r) = 0,$$

für $1 \leq r \leq l$, wobei $m_i = [(m-1)/e_i]$. Bemerke

$$y_{im}(z) = y_{im}^{(0)}(z) p_i(z)^{m_i+1} + y_{im}^{(1)}(z) p_i(z)^{m_i} + .. + y_{im}^{(m_i)}(z) p_i(z) + y_{im}^{m_i+1}(z),$$

wobei $y_{im}^{0}(z) = [y_{im}(z)/p_i(z)^{m_i+1}$ und $y_{im}^{(q)}(z) = [y_{im}(z)/p_i(z)^q]_{p_i(z)}$ für $1 \leq q \leq m_i + 1$ und $y_{im}^{(q)}(z) = 0$ für $q > m_i + 1$. Wenn wir nur den gebrochenen Anteil betrachten, haben wir

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{q=1}^{q_i+1} \sum_{m=1}^{d_i} f_m^{(i)} \frac{y^{(q)}}{im(z)} p_i(z)^q = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{d_i} f_m^{(i)} a^{(i)}(m_i + 1, m, r) \right) z^{-r} = 0,$$

wobei $q_i = [(d_i - 1)/e_i]$. Wir bezeichnen

$$f_{iq}(z) = \sum_{m=1}^{d_i} f_m^{(i)} y_{im}^{(q)}(z)$$

für $1 \leq q \leq q_i + 1, 1 \leq i \leq k$. Es gilt $deg(f_{iq}) < e_i)$. Mittels Partialburchzerlegung erhalten wir $f_{iq}(z) = 0$ für alle $1 \leq q \leq q_i + 1, 1 \leq i \leq k$. Da für $q = q_i + 1$,

$$f_{iq}(z) = \sum_{m=q_i e_i+1}^{d_i} f_m^{(i)} y_{im}^{(q)}(z) = 0.$$

Da $y_{im}^{(q_i+1)}(z), q_i e_i \leq m - 1 < d_i (\leq (q_i + 1)e_i)$, linear unabhängig sind über GF(b), haben wir $f_m^{(i)} = 0$ für $q_i e_i \leq m - 1 < d_i$ und $1 \leq i \leq k$. Wiederholen wir dasselbe Argument für $q = q_i, .., 1$, folgt, dass alle $f_m^{(i)} = 0$.

Damit haben wir jetzt alle Mittel die wir zur Konstruktion von (t,s) - Folgen brauchen, was noch fehlt ist eine Vorgehensweise zur effizienten Implementation. Eine effiziente Generierung für (t,s) - Folgen in Basis b=2 unter Verwendung des Gray Codes wurde von Antonov und Saleev vorgestellt. Hier besprechen wir nur den eindimensionalen Fall Mit s = 1, Basis b=2 und die Bijektionen λ_{ij} und ψ_r sind die identische Abbildung. Wir bezeichnen ein Folge $X_n, n = 0, 1, 2, .., 2^m - 1$, wobei m groß genug für praktische Anwendungen ist, zB. m =32. Aus der Definition, erhalten wir X_n aus der Multiplikation der $m \times m$ Generatormatrix $C = (c_{ij})$ mit dem Index Vektor, sodass Cn, mit n = $(n_1, .., n_m)^t$ für eine ganze Zahl n, wessen binäre Darstellung $n = n_m 2^{m-1} + ..n_2 2 + n_1$ ist. Betrachten wir den Gray code g = $(g_1, .., g_m)^t$ so dass $g_j = n_j + n_{j+1} \pmod 2$ für $j = 1, .., m$, wobei wir $n_{m+1} = 0$ setzen.
Antonov und Saleev zeigten, dass

$$Cg_n, n = 0, 1, .., 2^m - 1,$$

die ersten 2^m Punkte einer (t,s) - Folge festsetzen.

Diese Erkenntnis hat einen großen praktischen Nutzen. Betrachten wir die Differenz zwischen zwei angrenzenden Elementen in der Folge,

$$Cg_n \ \ XOR \ \ Cg_{n+1} = C(g_n XOR g_{n+1}).$$

Definition 4.2: XOR ist ein Operator für 2 Werte modulo 2 mit folgenden Ergebnissen: 0 XOR 0 = 0, 1 XOR 0 = 1, 0 XOR 1 = 1, 1 XOR 1 = 0. Für Vektoren gilt der Operator komponentenweise.

Da der Vektor, $g_n XOR g_{n+1}$, immer ein binärer Vektor der Länge 1 ist, können wir einfach ausgehend von jetztigen Vektors, durch Bestimmung des zum positiven Komponenten des Vektors dazugehörigen Spaltenvektors von C, das nächste Element in der Folge bestimmen.
Wollen wir die gerade besprochene Idee jetzt jetzt für eine (t,s)-Folge in einer beliebigen Basis b verwenden, verwenden wir den b-nären Gray Code, welcher folgendermaßen definiert ist: Wir definieren eine $m \times m$ - Matrix G =

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & ... & & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Der b-näre Gray Code $(g_1^{(n)}, .., g_m^{(n)})^t$, $n = 0, 1, 2, ..$ ist definiert durch $G(n_1, .., n_m)^t$, wobei $(n_1, .., n_m)^t$ ein Vektor der Länge m ist, wessen Einträge wir durch die Ziffernentwicklung der Zahl n in Basis b erhalten, $n = n_m b^{m-1} + .. + n_2 b + n_1$. Daraus folgt der nächste Satz:

Satz 4.2: Sei e_j der j-te Einheitsvektor der Länge m für $j = 1, 2, .., m$. Dann ist

$$(g_1^{(n+1)}, .., g_m^{(n+1)}) = (g_1^{(n)}, .., g_m^{(n)}) \oplus_b e_j,$$

wobei $\oplus_b$ die Koordinatenweise Addition modulo b bezeichnet und j der kleinste Index mit

$n_j \neq b-1$ in $(n_1, .., n_m)$ ist.

Literaturverzeichnis

[1] I.A. Antonov and V.M. Saleev An economic method of computing lp_{τ} sequences *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 19(1979), 252-256.

[2] H. Niederreiter. Random Number Gereration and Quasi-Monte-Carlo Methods *Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, Pennsylvania*, 1992, 23-60.

[3] H. Niederreiter. Low-discrepancy and low-dispersion sequences *Monatsh. Math.*, 104(1987), 273-337.

[4] H. Niederreiter. Point sets and sequences with small discrepancy *Monatsh. Math.*, 104(1987), 273-337.

[5] I.M. Sobol. the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 7(1967), 784-802.

[6] S. Tezuka. Uniform Random Numbers: Theory and Practice *Kluwer Academic Publishers*, 1995, 162-174.