



B A K K A L A U R E A T S A R B E I T

Die Bewertung von laufenden Leistungen

für die Lehrveranstaltung
Seminar Bakkalaureat TM (Finanz- und Versicherungsmathematik),

ausgeführt am Institut für
Analysis und Computational Number Theory (Math A)
der Technischen Universität Graz

unter Anleitung von O.Univ.-Prof. Dr.phil. Robert Tichy

durch
Sabine Woschitz
Matr.-Nr. 0430702

im
Sommersemester 2007

Datum

Unterschrift

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Deutscher Gesetzestext	2
1.2	Österreichischer Gesetzestext	2
2	Der steuerliche Teilwert für Waisen- und Zeitrenten	3
2.1	Beispiel für eine Waisenrente	3
3	Entwicklung der Teilwerte für Waisenrenten von Jahr zu Jahr	5
3.1	Beispiel zu einer sich erhöhenden Rente	6
4	Steuerlicher Teilwert für Witwen- und Witwerrenten	7
4.1	Berechnung des Barwerts für Witwen- und Witwerrenten	7
4.2	Sterbewahrscheinlichkeiten für Witwen und Witwer	8
4.3	Beispiel zu einer Witwenrente	8
5	Entwicklung der Teilwerte für Witwen- und Witwerrenten von Jahr zu Jahr	12
5.1	Berechnung des Barwertfaktors einer monatlich vorschüssigen Rente	12
5.2	Beispiel für eine sich erhöhende Rente	13
6	Der Teilwert für eine Rente aus eigenem Anspruch	14
6.1	Beispiel zu einer Rente aus eigenem Anspruch mit Hinterbliebenenrente	15
7	Entwicklung der Teilwerte für eine Rente aus eigenem Anspruch von Jahr zu Jahr	18
8	Außergewöhnliche Veränderungen der Teilwerte einer laufenden Rente von einem Jahr zum nächsten	19
8.1	Beispiel zu einer sich erhöhenden Rente	19
8.2	Beispiel zu einer sich erhöhenden Rente mit Hinterbliebenenleistung	21
8.3	Beispiel	23

Kapitel 1

Einleitung

Ziel dieser Arbeit wird es sein, die Pensionsrückstellung von bereits laufenden Leistungen zu berechnen. Grundlage dieser Arbeit ist das Buch von Thomas Hausmann, Pensionsrückstellungen - Eine praxisorientierte Einführung in die gutachterliche Methodik der Berechnung von Pensionsrückstellungen. Obwohl sich das Buch auf deutsche Verhältnisse bezieht, kann es auf Österreich ohne Veränderungen umgelegt werden, da die entsprechenden Gesetze in beiden Ländern gleich sind. Sowohl in Deutschland wie auch in Österreich bezieht sich der Paragraph 6a des Einkommenssteuergesetzes auf die in dieser Arbeit untersuchte Materie. Der Wortlaut differiert an einigen geringfügigen Stellen. Inhaltlich jedoch ist kein Unterschied festzustellen.

1.1 Deutscher Gesetzestext

In Deutschland lautet der §6a EstG:

“nach Eintritt des Versorgungsfalles ist der Barwert der künftigen Pensionsleistungen am Schluss des Wirtschaftsjahres“¹

als Teilwert der Pensionsverpflichtung anzusetzen.

1.2 Österreichischer Gesetzestext

Nach den österreichischen Gesetzen heißt es :

„Eine Pensionsrückstellung darf höchstens mit dem Teilwert der Pensionsverpflichtung angesetzt werden. Als Teilwert gilt [...] der Barwert [...] der zukünftigen Pensionsleistungen am Schluss des Wirtschaftsjahres.“²

Weiters heißt es im österreichischen Paragraphen 6aEStG, dass

„Bei der Berechnung des Teilwertes der Pensionsverpflichtung sind ein Rechnungszinsfuß von 6 vom Hundert und die anerkannten Regeln der Versicherungsmathematik anzuwenden.“³

Das ist auch der Grund, warum wir im folgenden immer mit einem Zins von 6% rechnen werden.

Somit gilt: **„Der steuerliche Teilwert für eine bereits laufende Rente ist der Barwert dieser Rente.“⁴** Nun wollen wir genau diesen Barwert verschiedener Renten berechnen.

¹Thomas Hausmann, Pensionsrückstellungen, Seite 45

²Hermann/Heuer/Raupach, Einkommenssteuer- und Körperschaftsgesetz

³ebenda

⁴ebenda

Kapitel 2

Der steuerliche Teilwert für Waisen- und Zeitrenten

Im Falle einer Zeitrente ist die Berechnung des Barwertes sehr leicht:

$$\text{Rentenrate} \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

In der Altersvorsorge gibt es echte Zeitrenten eigentlich nicht, da echte Zeitrente heißt, dass eine Zahlung über einen bestimmten Zeitraum erfolgt, egal ob die Person noch lebt, oder nicht. Es gibt aber Renten, die man näherungsweise als Zeitrenten betrachten kann.

- **1. Abgekürzte Leibrente:** Eine 2-jährige Rentenzahlung gebunden an das Leben einer 63-jährigen. Bei kurzer Dauer und nicht zu alten Menschen kann man dies näherungsweise als Zeitrente betrachten, da die Sterblichkeit in diesem Zeitraum eher gering und fast zu vernachlässigen wäre.
- **2. Waisenrente:** Hier ist eine Rentenzahlung gebunden an das Leben eines 10-jährigen Waisen, allerdings längstens bis zur Vollendung des 18. Lebensjahres. Bei Kindern ist die Sterblichkeit so gering, dass man sie ganz außer Acht lassen kann. Außerdem liegen bei Kindern auch gar nicht die biometrischen Grundwerte zur Verfügung, anders als bei den abgekürzten Leibrenten. Man müsste auf Sterbetafeln zurückgreifen.

2.1 Beispiel für eine Waisenrente

Angenommen ein Unternehmen mit 1000 Mitarbeitern hat ein Versorgungswerk eingerichtet. Allerdings gibt es unter den 400 Rentnern auch 5 Waisen. Die Daten sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

Name	Geburtsdatum	Rentenhöhe
Sarah M.	03.04.1993	32,50€
Paul W.	02.02.1998	48,30€
Doreen B.	04.02.1983	50,20€
Tanja F.	18.11.1988	10,13€
Sophie P.	21.08.1996	41,12€

Tabelle 1: Beispieldaten für Waisen

Es ist vorgesehen, dass die Rente gezahlt wird bis einschließlich zu dem Monat, in dem das 18. Lebensjahr vollendet wird. Allerdings macht man bei Doreen B. eine Ausnahme. Wegen ihrer Bedürftigkeit wurde ihr zugesichert, dass sie die Zahlung bis zur Beendigung der Ausbildung am 31.01.2004 erhält. Die Zahlungen erfolgen jeweils am Monatsende.

Frage: Wie hoch ist der steuerliche Teilwert für die fünf Waisen zum 31.12.2003?

Name	Geburtsdatum	Ende der Rentenzahlung	Laufzeit der Rente ab 31.12.2003 in Monaten	Rentenhöhe	Barwert zum 31.01.2004	Barwert zum 31.12.2003
Sarah M.	03.04.1993	30.04.2011	88	32,50€	2.333,09€	2.322€
Paul W.	02.02.1998	28.02.2016	146	48,30€	5.063,69€	5.039€
Doreen B.	04.02.1983	31.01.2004	1	50,20€	50,20€	50€
Tanja F.	18.11.1988	30.11.2006	35	10,13€	326,85€	325€
Sophie P.	21.08.1996	31.08.2014	128	41,12€	3.929,35€	3.910€
					Summe:	11.646€

Tabelle 2: Teilwerte für Waisenrenten

Jetzt wird anhand von Tanja F. der Rechengang erläutert. Tanja ist am 18.11.1988 geboren, folglich wird sie am 18.11.2006 das 18. Lebensjahr vollenden. Sie bekommt demnach die letzte Rente am 30.11.2006. Das heißt, dass sie nach dem 31.12.03 noch 35 Monatsrenten bekommt. Weil die Waisen die Rente aber immer am Ende des Monats bekommen, also nachschüssig, wird zuerst der vorschüssige Barwert zum 31.01.2004 berechnet, und dann um ein Monat abgezinst. Der Rechnungszins beträgt 6%.

Rechengang:

$$10.13 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1.06}\right)^{\frac{35}{12}}}{1 - \left(\frac{1}{1.06}\right)^{\frac{1}{12}}} = 326.85\text{€}$$

Dies ist der Barwert für den 31.01.2004. Nun muss dieser noch einmal abgezinst werden:

$$326.85 \cdot \frac{1}{1.06^{\frac{1}{12}}} = 325.27\text{€}$$

In der Altersvorsorge wird immer auf ganze Zahlen gerundet, deswegen steht in der Tabelle auch 325€ für den Barwert von der Waisenrente für Tanja F. Wir haben das gerade monatsgenau gerechnet, in der Praxis wird das allerdings meist nur jahresgenau gerechnet, d.h. die Laufzeit errechnet sich aus der Differenz zwischen dem Alter der Waisen am Bewertungsstichtag und dem Alter der Waisen zum Ende der Rentenzahlungen in vollen Jahren.

Kapitel 3

Entwicklung der Teilwerte für Waisenrenten von Jahr zu Jahr

Eine Waise, die Waisenrente erhält, wird über mehrere Jahre zu den Pensionsrückstellungen beitragen. Der Teilwert verringert sich aber von Jahr zu Jahr, weil die Laufzeit auch immer geringer wird.

In der nachstehenden Tabelle sieht man sehr schön, wie sich der Teilwert verringert, wenn sich die Laufzeit verringert. Allerdings sind in dieser Tabelle keine Barwerte angegeben sondern Barwertfaktoren. Diese muss man nur mit der Monatsrente multiplizieren und man erhält den Barwert.

Restlaufzeit der Waisen- rente in Jahren	Barwertfaktor zum steuer- lichen Rech- nungszins von 6%	Restlaufzeit der Waisen- rente in Jahren	Barwertfaktor zum steuer- lichen Rech- nungszins von 6%	Restlaufzeit der Waisen- rente in Jahren	Barwertfaktor zum steuer- lichen Rech- nungszins von 6%
0	0,00	10	91,17	20	142,07
1	11,69	11	97,69	21	145,72
2	22,71	12	103,85	22	149,15
3	33,11	13	109,65	23	152,40
4	42,92	14	115,13	24	155,46
5	52,18	15	120,30	25	158,34
6	60,91	16	125,18	26	161,06
7	69,15	17	129,78	27	163,63
8	76,92	18	134,12		
9	84,25	19	138,21		

Tabelle 3: Barwertfaktoren für monatlich vorschüssige Waisenrenten

Wenn man die Differenz einzelner Werte von Jahr zu Jahr betrachtet, so wird man bemerken, je länger eine Rente bezahlt wird, desto geringer ist im Verhältnis der Barwertfaktor. Um nun ein Beispiel zu nennen, betrachten wir die Rente mit einer Restlaufzeit von 20 Jahren. Wenn man diese auf 19 Jahre verkürzt, bewirkt das eine Verringerung des Teilwertes um fast 4 Monatsrenten. Betrachtet man jedoch die Rente mit einer Restlaufzeit von 9 Jahren und verkürzt diese auf 8 Jahre, so bewirkt das eine Verringerung um mehr als sieben Monatsrenten. Dies lässt sich allein auf die hohe Zinsrate von 6% zurückführen.

Graphisch lässt sich der Rückstellungsverlauf wie folgt darstellen:

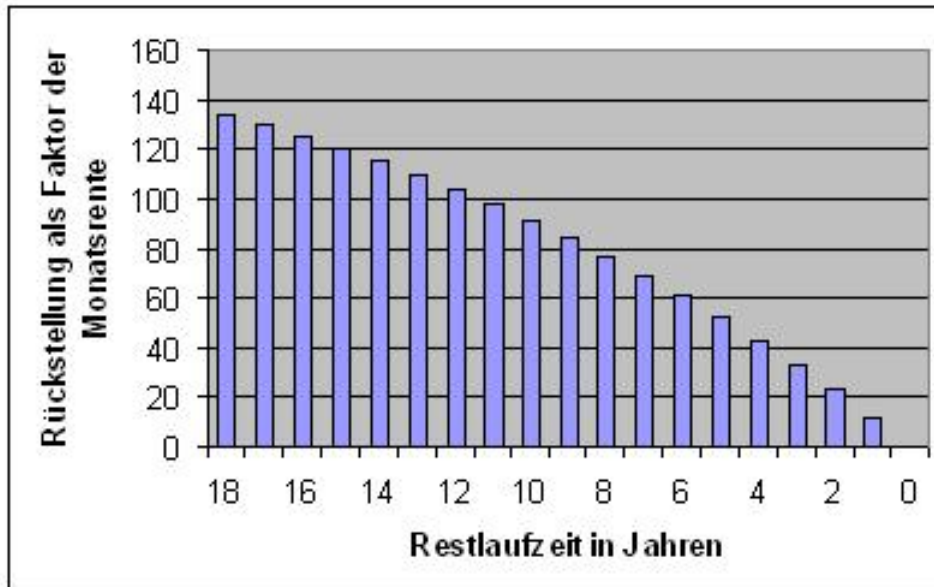


Tabelle 4: Rückstellungsverlauf für eine Waisenrente

Der Zahlbetrag einer Rente kann sich auch natürlich von Jahr zu Jahr erhöhen, z.b. infolge von Anpassungsprüfungen.

3.1 Beispiel zu einer sich erhöhenden Rente

Eine Rente von 100€ monatlich wird an eine Waise gezahlt, die Restlaufzeit dieser Waisenrente beträgt 20 Jahre. Laut der Tabelle von früher ergibt sich ein Teilwert von 14 207€. Ein Jahr später hat sich die Rente aber um 5% auf 105€ erhöht. Die Restlaufzeit beträgt jetzt aber nur mehr 19 Jahre, und der Teilwert ist 14 512€ für diese 19 Jahre. Das heißt, der Teilwert ist also nicht, wie angenommen gesunken, sondern hat sich sogar um 2% erhöht.

Genauso kann es aber auch vorkommen, dass sich der Teilwert von Jahr zu Jahr nicht ändert. Natürlich gibt es Zufälle, aber auch eine spezielle Ursache für diesen Effekt:

Viele Zusagen zur Waisenrentenzahlung haben kein festes Endalter, an dem die Zahlung aufhört, sondern machen es abhängig von Faktoren wie das Beenden einer beruflichen Ausbildung, oder von der Kindergeldberechtigung. So kann es z.b. sein, dass eine Waise Rentenzahlung bis zur Vollendung des 18. Lebensjahres erhält, aber im Falle eines Studiums oder einer Ausbildung kann die Zahlung bis zum 21. Lebensjahr verlängert werden. Wenn sie mit 18 noch in der Ausbildung ist, wird man als Restlaufzeit genau noch ein Jahr ansetzen. Ist sie dann noch immer in der Ausbildung, wird man wieder ein Jahr ansetzen. Dies kann sich über mehrere Jahre erstrecken.

Kapitel 4

Steuerlicher Teilwert für Witwen- und Witwerrenten

Falls ein Mitarbeiter eines Unternehmens verstirbt und eine Ehefrau hinterlässt, erhält diese, falls die Anspruchsvoraussetzungen erfüllt sind, eine Hinterbliebenenrente. Dies ist nun eine echte Leibrente, da diese mit dem Tod der Witwe (das gilt natürlich auch alles für einen Witwer) endet. Dieser Zeitpunkt ist zum Bewertungsstichtag nicht bekannt.

4.1 Berechnung des Barwerts für Witwen- und Witwerrenten

Man könnte eine durchschnittliche Lebenserwartung ansetzen, doch führt dies nicht zu den gewünschten Ergebnissen.

Die Definition eines Barwertes besagt, wenn man den Barwert der Verpflichtung fest anlegt (mit festem Zins), dann steht bei Fälligkeit der Verpflichtung genau das benötigte Kapital zur Verfügung. Bei einer Rentenzahlung zum Beispiel würde man jede Rente aus einer Geldanlage nehmen, und nach der letzten Rente ist auch das Kapital auf 0€ reduziert.

Allerdings würde sich das bei Leibrenten nicht ausgeben, da man ja nie genau weiß, wann die letzte Zahlung fällig ist.

Man kann sich aber damit behelfen, dass man statt einer Verpflichtung mehrere gleichartige Verpflichtungen betrachtet. Um das anhand eines Beispiels zu zeigen, nehmen wir an, dass wir 100 000 gleichartige Verpflichtungen haben. Von diesen 100 000 Personen sterben möglicherweise 1000 im ersten Jahr, 1100 im zweiten Jahr usw. Für diese 2100 Personen müssten demzufolge nur die Rentenraten für ein oder zwei Jahre zur Verfügung stehen.

So kann man diesen Vorgang fortsetzen, bis für alle Personen feststeht, wie lange sie noch Rentenzahlungen bekommen.

Nun kann man für jede einzelne Zeitrente den entsprechenden Barwert ermitteln. Somit kann der durchschnittliche Barwert für die 100 000 Personen ermittelt werden, und dies ist dann der Barwert der Leibrente.

Dieses Ergebnis weicht natürlich vom Barwert einer Zeitrente, deren Laufzeit die durchschnittliche Lebenserwartung ist, ab. Dies liegt daran, dass in jedem Jahr Personen sterben. Wenn angenommen die durchschnittliche Lebenserwartung 10 Jahre beträgt, so würde man jede einzelne Rentenrate für den Zeitraum zwischen 0 und 10 Jahren abzinsen und könnte so den Barwert ermitteln. Bei diesem Verfahren wird aber nicht berücksichtigt, dass die Rentenhöhe wegen der Sterblichkeit jährlich sinkt und dass auch nach den 10 Jahren noch Renten gezahlt werden, die dann für einen längeren Zeitraum abgezinst werden.

Die Werte für dieses Verfahren erhält man aus statistischen Erhebungen aus der Vergangenheit. (z.B. Sterbetafeln)

Statt wie vorher 100 000 Personen zu betrachten, kann man auch anders vorgehen: Man bewertet Renten genau so wie Zeitrenten, nur mit dem Unterschied, dass jede einzelne Rente noch mit der Wahrscheinlichkeit gewichtet wird, dass die entsprechende Person noch lebt. Beide Verfahren führen zum gleichen Ergebnis.

Allgemein wird festgehalten:

„Bei der Bewertung von Pensionsverpflichtungen ist jede mögliche Versorgungsleistung zu berücksichtigen. Sie geht mit der Wahrscheinlichkeit ihres Eintretens und unter Berücksichtigung des Rechnungszinses in die Bewertung ein.“¹

Angenommen bei 10 000 Personen mit derselben Verpflichtung besteht eine Wahrscheinlichkeit von 82,4%, dass die Rente im nächsten Jahre gezahlt wird. Genauer gesagt werden genau 8240 von 10 000 Personen die Rente erhalten. Wenn wir von einer Rente mit 100€ ausgehen, müsste das Unternehmen für jede von diesen 10 000 Personen 82,4€ zur Verfügung stellen. Insgesamt also 824000€.

Im weiteren muss also jede Rentenrate mit einer Wahrscheinlichkeit von 82,4% gewichtet werden. Um nun den Barwert zu berechnen, muss man sozusagen nicht nur den Zins sondern auch die Überlebenswahrscheinlichkeit berücksichtigen.

Ein Unternehmen hat natürlich immer unterschiedliche Verpflichtungen. Trotzdem wird bei großer Personenanzahl die Berechnung der Barwerte, gewichtet mit den Überlebenswahrscheinlichkeiten zu guten Ergebnissen führen.

4.2 Sterbewahrscheinlichkeiten für Witwen und Witwer

Um solche Berechnungen durchführen zu können, brauchen wir noch die Sterbewahrscheinlichkeiten für Witwer und Witwen.

Bei der Berechnung dieser Barwerte verwenden wir die Sterbetafel 2000/02², die von der Statistik Austria veröffentlicht wurde. Es ist aber zu berücksichtigen, dass diese Werte immer die ganze Bevölkerung berücksichtigen, uns aber nur die Sterbewahrscheinlichkeiten von Witwen interessieren. Diese Ungenauigkeiten werden wir in Kauf nehmen. (Witwen und Witwer haben tatsächlich andere Sterbewahrscheinlichkeiten.) Um die Berechnung allerdings ein bißchen leichter zu machen, handelt es sich dabei um eine vorschüssige Rentenzahlung.

4.3 Beispiel zu einer Witwenrente

Wir haben eine 85-jährige Witwe, die vorschüssige Rentenzahlung beträgt 1000€ im Jahr. Die erste Rate wird am 1.1.2004 fällig und man weiß schon jetzt dass sich ab dem 1.1.2009 die Rente halbiert.

- **Frage:** Wie groß ist der Barwert zum 31.12.2003?

Die meisten Sterbetafeln gehen nur bis zu einem rechnermäßigem Endalter von 100 Jahren, da ab diesem Zeitpunkt nur mehr wenige Leute ein höheres Alter erreichen und es daher keine Statistiken dazu gibt. Die Sterbewahrscheinlichkeiten für diese Witwe sind dann:

¹T.Hausmann, Seite 51

²Siehe Anhang, Sterbetafel 2000/02

Alter y	q_y		Alter y	q_y
85	9,36%		93	23,39%
86	10,65%		94	25,83%
87	12,04%		95	28,37%
88	13,53%		96	30,95%
89	15,17%		97	33,58%
90	16,98%		98	36,24%
91	18,95%		99	38,93%
92	21,09%		100	100%

Tabelle 5: Sterbewahrscheinlichkeiten für Witwen³

Allerdings ist für unsere Berechnung nicht die Wahrscheinlichkeit gefragt, ob die Witwe im nächsten Jahr stirbt, sondern vielmehr wollen wir wissen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, ein bestimmtes Alter zu erreichen.

Das heißt, wenn die Witwe mit 9,36% im ersten Jahr stirbt, überlebt sie mit 90,64% . Und wenn man wissen will, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine 85-jährige Witwe das 88. Lebensjahr erreicht, muss man erst einmal berechnen, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass sie das 86. Lebensjahr erreicht. Dies ist in unserem Fall 90,64%. Dann muss erst unsere 86-jährige Witwe das 87. Lebensjahr erreichen. Dies erreicht sie mit 89,35% von 90,64%, also mit 80,97%. Und die Wahrscheinlichkeit das 88. Lebensjahr zu erreichen beträgt nun 71,24%. Jetzt können wir für jedes Alter das die 85-jährige Witwe erreicht, die dazugehörige Wahrscheinlichkeit berechnen.

Alter y	Jahre t	q_y	${}_t p_{85}$		Alter y	Jahre t	q_y	${}_t p_{85}$
85	0	9,36%	100%		93	8	23,39%	27,74%
86	1	10,65%	90,64%		94	9	25,83%	21,26%
87	2	12,04%	80,97%		95	10	28,37%	15,77%
88	3	13,53%	71,24%		96	11	30,95%	11,29%
89	4	15,17%	61,6%		97	12	33,58%	7,80%
90	5	16,98%	52,25%		98	13	36,24%	5,18%
91	6	18,95%	43,38%		99	14	38,93%	3,30%
92	7	21,09%	35,16%		100	15	100%	2,02%

Tabelle 6: Mehrjährige Überlebenswahrscheinlichkeiten einer 85-jährigen Witwe

Daraus kann man sofort ablesen, dass die Wahrscheinlichkeit unserer 85-jährigen Witwe das Alter 95 zu erreichen, nur 15,77% beträgt. Mit Hilfe dieser Tabelle können wir nun den Barwert dieser Witwenrente berechnen.

³Siehe Anhang, Sterbetafel 2000/02

Es gilt:

„Bei der Bewertung einer lebenslänglichen Witwenrente wird wie bei der Bewertung einer Zeitrente vorgegangen. Das Ende dieser Zeitrente ist ein ausreichend hohes Alter, das nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit erlebt wird, eben das Schlussalter der Sterbetafel. Jede zwischenzeitlich anfallende Rentenrate wird mit der Wahrscheinlichkeit gewichtet, mit der die Witwe das entsprechende Alter erreicht.“⁴

Nun können wir für unser Beispiel von vorher den Barwert berechnen und tun dies in einer Tabelle:

Fälligkeit	Alter y	Jahre t	q_y	${}_t p_{70}$	Rentenhöhe	abgezinst bis zum 31.12.2003	gewichtet mit der Wahr- scheinlichkeit ${}_t p_{70}$
01.01.2004	85	0	9,36%	100%	1.000,00€	1.000,00€	1.000,00€
01.01.2005	86	1	10,65%	90,64%	1.000,00€	943,40€	855,10€
01.01.2006	87	2	12,04%	80,97%	1.000,00€	890,00€	720,63€
01.01.2007	88	3	13,53%	71,24%	1.000,00€	839,62€	598,15€
01.01.2008	89	4	15,17%	61,60%	1.000,00€	792,09€	487,93€
01.01.2009	90	5	16,98%	52,25%	500,00€	373,63€	195,22€
01.01.2010	91	6	18,95%	43,38%	500,00€	352,48€	152,91€
01.01.2011	92	7	21,09%	35,16%	500,00€	332,53€	116,92€
01.01.2012	93	8	23,39%	27,74%	500,00€	313,71€	87,02€
01.01.2013	94	9	25,83%	21,26%	500,00€	295,95€	62,92€
01.01.2014	95	10	28,37%	15,77%	500,00€	279,20€	44,03€
01.01.2015	96	11	30,95%	11,29%	500,00€	263,39€	29,74€
01.01.2016	97	12	33,58%	7,80%	500,00€	248,48€	19,38€
01.01.2017	98	13	36,24%	5,18%	500,00€	234,42€	12,14€
01.01.2018	99	14	38,93%	3,30%	500,00€	221,15€	7,30€
01.01.2019	100	15	100%	2,02%	500,00€	208,63€	4,21€
Summe:							4.393,6€

Tabelle 7: Barwert einer lebenslänglichen Witwenrente

Wenn wir uns nun ein Zeile anschauen, z.B. die Zeile mit dem Alter 95, am 01.01.2014. Die Rentenrate beträgt 500€, da sie ja ab 01.01.2009 halbiert wurde. Die Wahrscheinlichkeit einer 95-jährigen Witwe innerhalb eines Jahres zu versterben, beträgt 28,37%.

Die 500€ müssen mit dem Zins von 6% genau 10 Jahre abgezinst werden, um auf den Barwert zu kommen, und dieser beträgt 279,2€. Nun muss dieser Barwert noch mit der Wahrscheinlichkeit gewichtet werden, dass sie dieses Alter überhaupt erreicht, also 15,77% von 279,2€ also 44,03€.

Wenn man diese Berechnung für jedes Alter macht, und die Ergebnisse summiert, erhält man einen Barwert

⁴T.Hausmann, Seite 53

von 4 393,6€.

In der Praxis wäre es zu aufwendig immer Tabellen zu erstellen, deswegen haben gängige Sterbetafeln auch ausgerechnete Barwertfaktoren. Diesen braucht man nur mit der gleichbleibenden Monatsrente zu multiplizieren und man erhält den Barwert.

Kapitel 5

Entwicklung der Teilwerte für Witwen- und Witwerrenten von Jahr zu Jahr

5.1 Berechnung des Barwertfaktors einer monatlich vorschüssigen Rente

Nun wollen wir uns anschauen, wie sich der Barwert von Jahr zu Jahr ändert. Zur Berechnung des Barwertfaktors habe ich mir die Leibrententafel¹ für eine lebenslang vorschüssige Rente vom Betrag 1 nach der Sterbetafel 2000/02 angeschaut. Diese enthält allerdings nur Barwertfaktoren für eine jährlich gezahlte Rente, wir wollen aber wissen, wie hoch der Barwertfaktor bei einer monatlichen vorschüssigen Rente ist. Die Berechnung hierfür ist ganz einfach (lt Statistik Austria).

Man nehme den Barwertfaktor der jährlichen Rente, subtrahiert 0,458, und multipliziert das ganze mit 12. Nehmen wir zum Beispiel einen Mann von 35 Jahren. Sein Barwertfaktor lt Tabelle beträgt 15.649. Der Barwertfaktor einer monatlichen vorschüssigen Rente beträgt $(15.649 - 0.458) \cdot 12$ also 182.3.

Allerdings ist zu beachten, dass diese Tafeln die gesamte Bevölkerung berücksichtigen, während uns nur gewisse Teile davon, wie z.b. Bezieher einer bestimmten Rentenart interessieren.

Aber für unsere Berechnungen sind sie ausreichend. Zu beachten ist allerdings, dass der Barwertfaktor im Alter 100 eigentlich „0“ sein müsste. Da es aber doch noch Personen gibt, die älter als 100 werden, werden so etwaige Ungenauigkeiten ausgeglichen.

Die entsprechenden Tabellen befinden sich im Anhang.

Wie vorher schon erwähnt spielt hier die gesamte Bevölkerung eine Rolle. Wir werden diese Werte später auch für Witwer und Rentner, die eine Leistung aus eigenem Anspruch erhalten, verwenden, wobei diese tatsächlich eine andere Sterbewahrscheinlichkeit haben.

¹Siehe Anhang, Leibrententafel

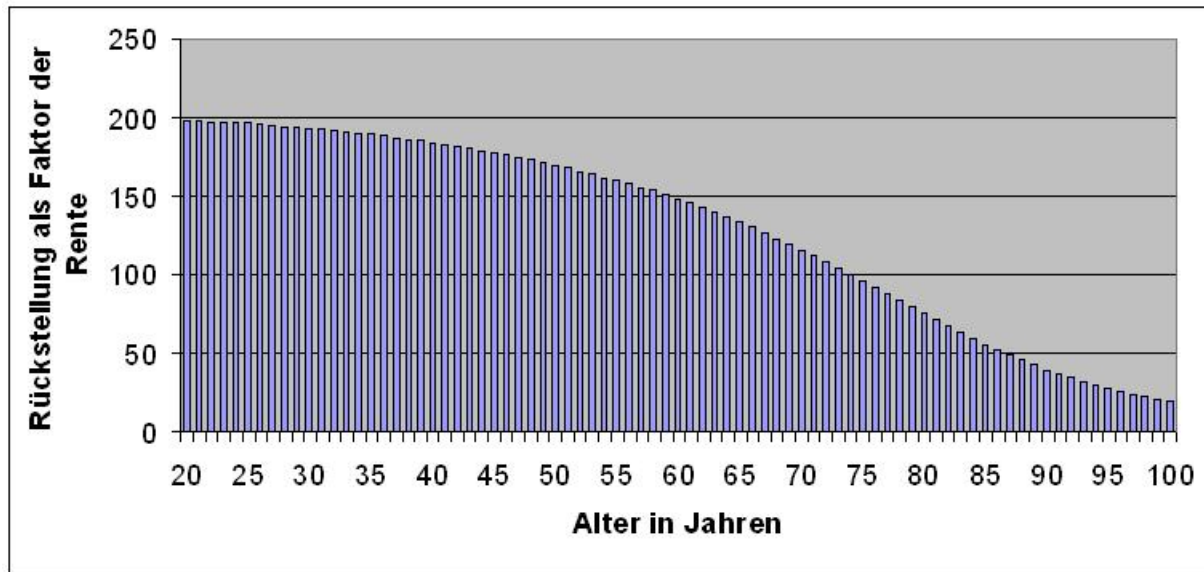


Tabelle 8: Rückstellungsverlauf für eine lebenslängliche Witwenrente

Die Grafik zeigt den Rückstellungsverlauf als Faktor der Rente. Stirbt die Witwe mit einem bestimmten Alter, so wird die Rückstellung völlig aufgelöst und beträgt 0€.

Bei dem Rückstellungsverlauf im Alter 55 bis 75 kommt man auf folgende Faustformel:

„Der Barwert einer unveränderlichen lebenslänglichen laufenden Rente verringert sich von Jahr zu Jahr um etwa 3 Monatsrenten.“²

Diese Faustregel gilt nur, wenn die Rente gleichbleibt. Wird sie infolge von Anpassungsprüfungen erhöht, steigt auch der Barwert.

5.2 Beispiel für eine sich erhöhende Rente

Eine Witwe bekommt ab dem 60 Lebensjahr eine lebenslänglich laufende Rente von 100€. Mit 63 wird die Rente auf 105€ angehoben. Der Barwert im Alter 62 beträgt $100 \cdot 141 = 14100\text{€}$ und im Alter von 63 beträgt er $105 \cdot 138 = 14490\text{€}$. Hier sieht man, dass der Barwert sogar um fast 4 Monatsrenten gestiegen ist!.

Eine zweite wichtige Faustregel im Zusammenhang mit der Anpassung von Renten lautet wie folgt:

„Eine garantierte zukünftige Anpassung der laufenden Leistungen um 1% pro Jahr erhöht den Barwert um ca. 10%.“³

²T. Hausmann, Seite 58

³ebenda

Kapitel 6

Der Teilwert für eine Rente aus eigenem Anspruch

Eine Rente aus eigenem Anspruch wäre zum Beispiel eine Invaliditäts- oder Altersrente. Der erhebliche Unterschied zu einer Waisen und Witwenrente besteht in den unterschiedlichen Sterbewahrscheinlichkeiten. Allerdings werden wir darauf nicht Rücksicht nehmen, da die Daten der Statistik Austria keine entsprechenden Unterscheidungen treffen.

Meistens kann man diesen Unterschied vernachlässigen, da es ab einem gewissen Alter eigentlich keine Rolle mehr spielt, aus welchen Gründen man eine Rente bekommt.

Doch wenn man hingegen jüngere Personen betrachtet ist der Unterschied groß, da natürlich die Lebenserwartung von einem jüngeren Menschen mit Invaliditätsrente deutlich geringer ist, als z. B. von jemandem im gleichen Alter, der „nur“ eine Hinterbliebenenrente bekommt.

Natürlich sind unsere verwendeten Sterbewahrscheinlichkeiten zu gering zur Bewertung von Invaliditätsrenten, trotzdem wollen wir diesen Unterschied in Kauf nehmen.

Es gilt:

„Bei gleichem Geschlecht und gleichem Alter des Begünstigten und ohne Berücksichtigung einer weiteren Hinterbliebenenanwartschaft gilt: Der Barwert einer Altersrente unterscheidet sich nur wenig von dem Barwert einer Witwen- bzw. Witwerrente. Der Barwert einer Invaliditätsrente liegt dagegen bei jüngeren Begünstigten deutlich unter dem Barwert einer Witwen- bzw. Witwerrente.“¹

Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen dem Barwert einer Witwenrente und dem Barwert einer Invaliditätsrente oder Altersrente ist, dass natürlich auch, sofern dies vorgesehen ist, beim Tode des Empfängers einer Invaliditäts- oder Altersrente Hinterbliebenenleistungen anfallen können.

Und diese spielen beim Ermitteln des Barwertes auch eine große Rolle.

Betrachten wir zum Beispiel einen 80-jährigen Mann. Die Wahrscheinlichkeit des 80-jährigen im Alter 85 zu sterben und eine Witwe zu hinterlassen, hängt ab von

- der Wahrscheinlichkeit den 85. Geburtstag zu erleben
- der Wahrscheinlichkeit dann innerhalb eines Jahres zu sterben
- der Wahrscheinlichkeit beim Tode noch verheiratet zu sein

Diese Wahrscheinlichkeiten stehen alle zur Verfügung. In die Berechnung des Barwertes fließt dann noch das Alter der hinterbliebenen Ehefrau ein. Aber auch diese Werte bekommt man von der Statistik Austria. (Für diese Arbeit wurden allerdings andere Rechnungsgrundlagen nach Ettl /Pagler² verwendet.)

¹T.Hausmann, Seite 59

²Siehe Anhang, Rechnungsgrundlagen nach Ettl/Pagler

Aufgrund der höheren Lebenserwartung von Frauen ist die Wahrscheinlichkeit im Tode noch verheiratet zu sein deutlich geringer als bei Männern.

6.1 Beispiel zu einer Rente aus eigenem Anspruch mit Hinterbliebenenrente

Betrachtet wird ein 80-jähriger Empfänger einer lebenslänglichen Altersrente von 1 000€. Falls er im Tod verheiratet ist, erhält die Witwe eine lebenslängliche Hinterbliebenenrente von 600€. Aus der Tabelle³ lesen wir den Barwertfaktor für einen 80-jährigen Mann ab. Dieser beträgt 64,9, d.h. der Barwert beträgt 64 900€. Jetzt fehlt allerdings noch die Anwartschaft auf die Witwenrente. Um diese zu berechnen, brauchen wir für jedes Alter dieses Witwers zusammengefasst noch einmal:

- die Wahrscheinlichkeit dieses Alter lebend zu erreichen
- die Wahrscheinlichkeit dann innerhalb eines Jahres zu sterben
- die Wahrscheinlichkeit zum Todeszeitpunkt verheiratet zu sein
- das Alter der Ehefrau beim Tode des Ehemannes
- den Barwert der ausgelösten Witwenrente

³Siehe Anhang, Tabelle 1

Alter x	Jah- re t	q_x	$t p_{80}$	h_x	$t p_{80}$ * q_x * h_x	y_x	a_y	Wit- wen- rente	Barwert der Wit- wenrente	abge- zinst	gewich- tet mit der Wahr- schein- lichkeit des Ein- tretens
80	0	7,59%	100,0%	56,45%	4,28%	74	100,4	600€	60 240€	60 240€	2 578€
81	1	8,47%	92,41%	54,05%	4,23%	75	96,3	600€	57 780€	54 509€	2 306€
82	2	9,47%	84,58%	51,54%	4,13%	76	92,2	600€	55 320€	49 235€	2 033€
83	3	10,53%	76,57%	48,91%	3,94%	76	92,2	600€	55 320€	46 448€	1 830€
84	4	11,62%	68,51%	46,18%	3,68%	77	88,1	600€	52 860€	41 870€	1 541€
85	5	12,77%	60,55%	43,35%	3,35%	78	84,0	600€	50 400€	37 662€	1 262€
86	6	13,99%	52,82%	40,47%	3,00%	78	84,0	600€	50 400€	35 530€	1 066€
87	7	15,31%	45,43%	37,57%	2,61%	79	79,8	600€	47 880€	31 843€	831€
88	8	16,77%	38,47%	34,69%	2,24%	79	79,8	600€	47 880€	30 041€	673€
89	9	18,39%	32,02%	31,85%	1,88%	80	75,7	600€	45 420€	26 884€	505€
90	10	20,21%	26,13%	29,09%	1,54%	80	75,7	600€	45 420€	25 362€	391€
91	11	22,22%	20,85%	26,41%	1,22%	81	71,7	600€	43 020€	22 662€	276€
92	12	24,40%	16,22%	23,84%	0,94%	81	71,7	600€	43 020€	21 380€	201€
93	13	26,73%	12,26%	21,38%	0,70%	81	71,7	600€	43 020€	20 170€	141€
94	14	29,14%	8,98%	19,05%	0,50%	81	71,7	600€	43 020€	19 028€	95€
95	15	31,62%	6,37%	16,88%	0,34%	82	67,6	600€	40 560€	16 924€	58€
96	16	34,15%	4,35%	14,84%	0,22%	82	67,6	600€	40 560€	15 966€	35€
97	17	36,71%	2,87%	12,92%	0,14%	83	63,7	600€	38 220€	14 194€	20€
98	18	39,29%	1,81%	10,04%	0,07%	83	63,7	600€	38 220€	13 390€	9€
99	19	41,89%	1,10%	6,91%	0,03%	83	63,7	600€	38 220€	12 632€	4€
100	20	100,0%	0,64%	4,33%	0,02%	83	63,7	600€	38 220€	11 917€	2€
										Summe:	15 857€

Tabelle 9: Barwert einer Anwartschaft auf Witwenrente

Nun zur Erklärung der Tabelle. Wenn wir uns eine Zeile herausnehmen, z. B. die mit dem Alter 87. Wie vorher überlegt, brauchen wir die Wahrscheinlichkeit dieses 87-jährigen Rentners innerhalb des Jahres zu sterben und dann natürlich die Wahrscheinlichkeit, dass ein 80-jähriger überhaupt 87 Jahre alt wird.

Diese Werte geben uns die dritte und die vierte Spalte wider. In der zweiten Spalte stehen die Anzahl der Jahre, die seit dem Alter 80 vergangen sind. Den Wert aus der vierten Spalte, also die Wahrscheinlichkeit das Alter 87 zu erreichen, berechnet sich durch die Wahrscheinlichkeiten in den Altern 80-86 nicht zu sterben.

Also:

$$(100\% - 7,59\%) \cdot (100\% - 8,47\%) \cdot (100\% - 9,47\%) \cdot (100\% - 10,53\%) \cdot (100\% - 11,62\%) \cdot (100\% - 12,77\%) \cdot (100\% - 13,99\%) = 45,43\%$$

Für unsere Berechnung muss er dann aber innerhalb eines Jahres versterben. Die ersten beiden Bedingungen zusammen ergeben 15,31% von 45,43% also 6,96%.

Da wir ja den Barwert einer verbliebenen Witwenrente berechnen, brauchen wir noch die Wahrscheinlichkeit dass dieser 87-jährige beim Tode verheiratet ist. Dieser Wert befindet sich in der fünften Spalte. Damit der von uns geforderte Fall tatsächlich eintritt, muss der 80-jährige bis 87 überleben, dann sterben und eine Witwe hinterlassen. Dieser Wert beträgt 6,96% von 37,57% also 2,61%.

Dies ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass unser vorher definierte Versorgungsfall tatsächlich eintritt. In der siebten Spalte ist das Alter der Witwe angegeben und in der achten Spalte der Barwertfaktor dieser Witwenrente.

Wie vorher definiert beträgt die Rente 600€. Der Barwert der Witwenrente beträgt demzufolge 47880€. Dieser Wert muss aber noch auf den Bewertungsstichtag abgezinst werden, in dieser Zeile also noch um 7 Jahre:

$$47880 \cdot 1,06^{-7} = 31843\text{€}$$

Und da dieser spezielle Fall aber nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,61% eintritt, beträgt der Barwert: 831€

Wenn man für jedes Alter von 80-100 diese Beträge berechnet und zum Schluss addiert, hat man den vollständigen Barwert der Hinterbliebenenanwartschaft von 15 857€

Damit beträgt der Barwert der Altersrente inklusive Witwenanwartschaft 80 757€, da der Barwert nur für die Leistungen an den Mann 64 900€ beträgt.

Wie wir gesehen haben, ist auch bei der Hinterbliebenenanwartschaft die Höhe des Barwertes nur vom Alter des Rentenempfängers abhängig. Mathematiker verwenden in der Praxis Tabellen, in denen bereits der Rentenbarwert inklusive Hinterbliebenenanwartschaft in der Höhe von 50% oder 60% der Alters- oder Invaliditätsrente aufgelistet ist. Unsere Überlegungen bisher waren gültig für den jeweiligen Ehepartner zum Zeitpunkt des Todes.

Es gibt natürlich auch Fälle, wo eine Hinterbliebenenanwartschaft nur an namentlich genannte Ehepartner zugesagt wird. Wenn so etwas auftritt, wird dieser Fall individuell bewertet. So wird mit dem richtigen Alter und nicht mit dem durchschnittlichen gerechnet, und die Wahrscheinlichkeit beim Tode noch verheiratet zu sein wird berechnet aus der Wahrscheinlichkeit, dass der namentlich genannte Ehepartner zum Zeitpunkt des Todes des Begünstigten noch lebt. Scheidungswahrscheinlichkeiten werden hierbei vernachlässigt.

Große Unterschiede zwischen einer individuellen und einer kollektiven Bewertung treten nur dann auf, wenn die Frau um viele Jahre jünger ist als der Mann.

Kapitel 7

Entwicklung der Teilwerte für eine Rente aus eigenem Anspruch von Jahr zu Jahr

Allgemein gilt folgende Faustregel:

„Der Barwert für eine Altersrente an einen Mann erhöht sich durch eine Witwenrentenanwartschaft in der Höhe von 60% der Altersrente um etwa 2 Jahresrenten.
Der Barwert für eine Altersrente an eine Frau erhöht sich dagegen durch eine gleich hohe Witwerrentenanwartschaft um etwa 2 Monatsrenten“¹

Bei jüngeren Invalidenrentnern ist der Barwert der Hinterbliebenenanwartschaft natürlich größer als bei Altersrentner- und rentnerinnen. Wie zuvor ist der Unterschied im Barwert von der Hinterbliebenenanwartschaft zwischen Frau und Mann deshalb so groß, weil Frauen eine längere Lebenserwartung haben. Doch wie verändert sich der Barwert einer lebenslänglich laufenden Rente mit Hinterbliebenenanwartschaft von Jahr zu Jahr? Nehmen wir an, dass die Erhöhung durch die Hinterbliebenenanwartschaft über mehrere Jahre stabil bleibt, dann gibt es folgende Faustregel:(ähnlich wie bei Witwen- und Witwerrenten)

„Der Barwert einer unveränderlichen lebenslänglich laufenden Rente (mit oder ohne Hinterbliebenenanwartschaft) verringert sich von Jahr zu Jahr um etwa 3 Monatsrenten“.²

Der Rückstellungsverlauf sieht also ähnlich aus wie der bei einer lebenslänglichen Witwenrente.

¹T.Hausmann, Seite 64

²ebenda

Kapitel 8

Außergewöhnliche Veränderungen der Teilwerte einer laufenden Rente von einem Jahr zum nächsten

Wir haben uns in den vorigen Kapiteln nur mit der Veränderung der Barwerte beschäftigt unter dem Aspekt, dass die Rente gleich blieb. Aber in diesem Abschnitt werden wir uns überlegen, wie sich der Barwert ändert, wenn etwaige Veränderungen eintreten. So zum Beispiel eine Erhöhung der laufenden Rente in Form einer Anpassungsprüfung alle 3 Jahre.

8.1 Beispiel zu einer sich erhöhenden Rente

Ein Mann bekommt ab der Vollendung des 62. Lebensjahres eine Rente in der Höhe von 300€ monatlich. Es gibt keine Hinterbliebenenrente. Eine Anpassungsprüfung wird alle 3 Jahre gemacht. Bei jeder dieser Anpassungsprüfungen wird die Steigerung des Verbraucherpreisindex ausgeglichen. Der Mann verstirbt kurz vor der Vollendung des 83. Lebensjahres.

Frage: Wie entwickelt sich die Rückstellung?

Die Prozentsätze der Anpassungsprüfung sind wie folgt:

Alter	Rentenanpassung
65	5,5%
68	6,2%
71	6,8%
74	6,1%
77	5,1%
80	4,2%

Tabelle 10: Beispiel für Rentenanpassungen

Alter	Renten- passung	Renten- höhe	Bar- wert- faktor	Barwert
62		300,0€	126,7	38 010€
63		300,0€	123,6	37 080€
64		300,0€	120,4	36 120€
65	5,5%	316,5€	117,2	37 094€
66		316,5€	113,9	36 049€
67		316,5€	110,6	35 005€
68	6,2%	336,1€	107,2	36 030€
69		336,1€	103,8	34 887€
70		336,1€	100,4	33 744€
71	6,8%	358,9€	96,9	34 777€
72		358,9€	93,4	33 521€
73		358,9€	89,8	32 229€
74	6,1%	380,8€	86,3	32 863€
75		380,8€	82,7	31 492€
76		380,8€	79,1	30 121€
77	5,1%	400,2€	75,5	30 215€
78		400,2€	72,0	28 814€
79		400,2€	68,4	27 374€
80	4,2%	417,0€	64,9	27 063€
81		417,0€	61,5	25 646€
82		417,0€	58,2	24 269€

Tabelle 11: Rückstellungsverlauf einer regelmäßig angepassten Rente

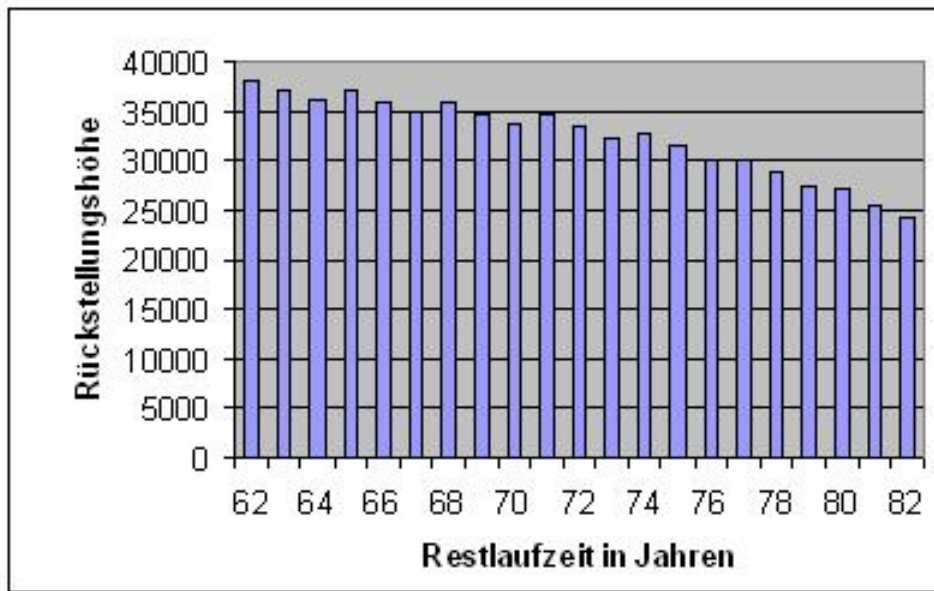


Tabelle 12: Rückstellungsverlauf einer regelmäßig angepassten Rente

Hier sieht man, dass der Verlauf der Rückstellung nicht mehr kontinuierlich, sondern in Wellenbewegungen sinkt.

8.2 Beispiel zu einer sich erhöhenden Rente mit Hinterbliebenenleistung

Wir betrachten uns jetzt das gleiche Beispiel wie vorher, allerdings wird eine Hinterbliebenenleistung zugesagt. Der Mann verstirbt kurz vor der Vollendung des 75. Lebensjahres und es setzt eine Witwenrente in der Höhe von 60% der zuletzt gezahlten Altersrente an die 70-jährige Witwe ein. Die Witwe verstirbt kurz vor der Vollendung des 80. Lebensjahres.

Der Barwertfaktor der Altersrente wird noch pauschal mit 2 Jahresrenten erhöht, wie oben in der Faustregel erklärt. Die Barwertfaktoren erhöhen sich damit um jeweils 24.

Alter	Renten- passung	Renten- höhe	Barwert faktor ohne Witwen- anwartschaft	Pauschaler Aufschlag für Witwen- anwartschaft	Maß- geblicher Barwert- faktor	Barwert
62		300,0€	126,7	24	150,7	45 210€
63		300,0€	123,6	24	147,7	44 310€
64		300,0€	120,4	24	144,4	43 320€
65	5,5%	316,5€	117,2	24	141,2	44 690€
66		316,5€	113,9	24	137,9	43 645€
67		316,5€	110,6	24	134,6	42 601€
68	6,2%	336,1€	107,2	24	131,2	44 096€
69		336,1€	103,8	24	127,8	42 954€
70		336,1€	100,4	24	124,4	41 811€
71	6,8%	358,9€	96,9	24	120,9	43 391€
72		358,9€	93,4	24	117,4	42 135€
73		358,9€	89,8	24	113,8	40 843€
74	6,1%	380,8€	86,3	24	110,3	42 002€

Ab hier Rentenzahlung an die Witwe

70		228,5€	116,1		116,1	26 529€
71		228,5€	112,3		112,3	25 661€
72	5,1%	240,2€	108,4		108,4	26 038€
73		240,2€	104,4		104,4	25 077€
74		240,2€	110,4		100,4	24 116€
75	4,2%	250,3€	96,3		96,3	24 104€
76		250,3€	92,2		92,2	23 078€
77		250,3€	88,1		88,1	22 051€
78	4,5%	261,6€	84,0		84,0	21 974€
79		261,6€	79,8		79,8	20 876€

Tabelle 13: Rückstellungsverlauf mit Übergang auf Witwe

Hier sieht man, dass sich der Barwertfaktor durch den Übergang auf die Witwe nicht wesentlich erhöht. Allerdings verringert sich die Leistung deutlich, was im folgenden Rückstellungsverlauf graphisch dargestellt wird:

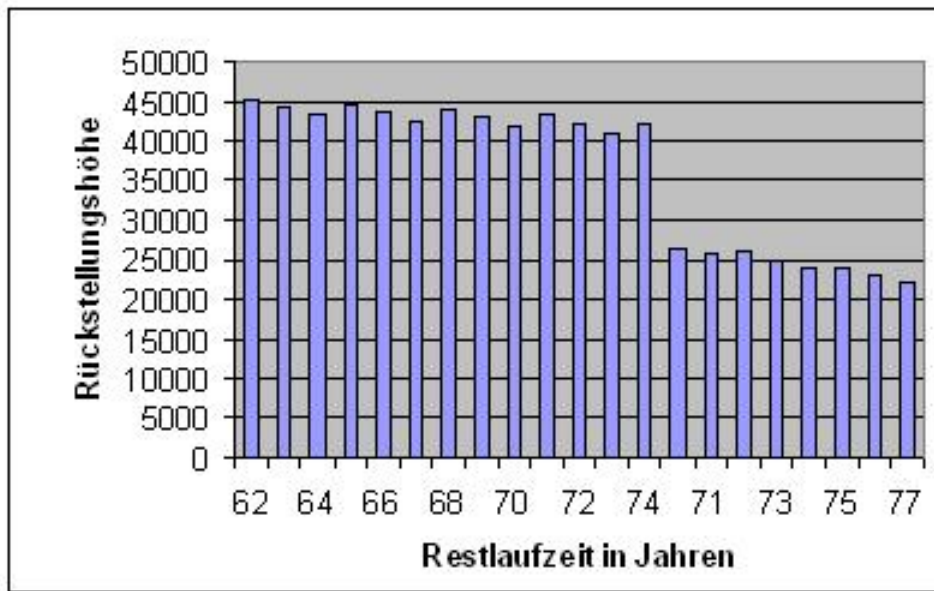


Tabelle 14: Rückstellungsverlauf einer Rente mit Übergang auf Witwe

Der deutliche Rückgang der Pensionsrückstellungen hängt natürlich sehr stark davon ab, wie hoch die Rente an die Hinterbliebene ist, und wie alt die Witwe dann tatsächlich ist. Weil vor dem Tod des Mannes wurde die Anwartschaft auf die Witwenrente kollektiv bewertet, aber nach dem Tod hängt sie vom tatsächlichen Alter der Witwe ab.

Wenn wir uns diese Veränderungen zahlenmäßig anschauen wollen, betrachten wir wieder ein Beispiel.

8.3 Beispiel

Wir betrachten einen 65-jährigen Mann mit einer monatlichen Rente von 1000€. Ein paar Monate nach seinem 65. Geburtstag verstirbt der Mann und seine Witwe bekommt eine monatliche Hinterbliebenenrente von 600€. Wir wollen uns nun die Veränderung der Pensionsrückstellungen in Abhängigkeit vom Alter der Witwe anschauen.

Der Barwertfaktor für einen 65-jährigen Mann beträgt 117,2 und für die Anwartschaft auf die Witwenrente wird noch 24 dazuaddiert. (Zwei Jahresrenten) Somit betrug die Pensionsrückstellung vor ein paar Monaten 141 200€. Die Rückstellung für die verschiedenen Alter der Witwe ergibt sich wie folgt:

Alter der Witwe	Barwert- faktor	Barwert	Veränderung gegenüber dem Vorjahr
50	169,7	101 820€	-39 380€
55	160,2	96 120€	-45 080€
60	148,3	88 980€	-52 220€
65	133,5	80 100€	-61 100€
70	116,1	69 660€	-71 540€
75	96,3	57 780€	-83 420€
80	75,7	45 420€	-95 780€

Tabelle 15: Rückstellungsveränderung beim Übergang zu 60% auf die Witwe

Es kann natürlich vorkomen, dass bei einer sehr jungen Witwe die Rückstellung noch ansteigt, allerdings wird bei einer zu großen Altersdifferenz eine Zusage für Hinterbliebenenleistung nicht erfolgen.

Literaturverzeichnis

- [1] Thomas Hausmann. Pensionsrückstellungen - Eine praxisorientierte Einführung in die gutachterliche Methodik der Berechnung von Pensionsrückstellungen, Karlsruhe 2004
- [2] Herrmann/Heuer/Raupach. Einkommenssteuer- und Körperschaftsgesetz Kommentar, Jahresband 2005, Köln 2006
- [3] Statistik Austria. Sterbetafel 2000/02, Leibrententafel einer monatlich vorschüssigen Rente vom Betrag 1 nach der Sterbetafel 2000/02
- [4] Ettl/Pagler. Biometrische Grundwerte Frauen, Männer.Rechnungsgrundlagen nach Ettl/Pagler, http://reinhold.kainhofer.com/Lehre/05_WUE_PVM/EttlPagler.pdf