Einführung in Quasi-Monte Carlo Verfahren

Markus Zahrnhofer

3. Mai 2007

Inhalt der Präsentation

Motivierendes Beispiel

- Mortgage-backed Security
    - Teil des Hypothekenportfolios wird an Investoren verkauft
    - Hypotheken kommen in Pool
    - Investor mit x% an Pool beteiligt
    - Amerikanische Option für den Haushalt
    - Vorauszahlungsfunktion ist für Bewertung wichtig

Motivierendes Beispiel

- Collateralized Mortgage Obligation
  - Investoren werden in Klassen unterteilt
  - Regeln wie die Rückzahlungen aufgeteilt werden
  - wollen Erwartungswerte der Summe der Barwerte der zukünftigen Zahlungen schätzen
  - Modell von Paskov und Traub

Motivierendes Beispiel

- Fälligkeitsdauer T=30
- monatliche Zahlungen C
- 10 Klassen unterteilt
- i_j monatliche Zinsrate im Monat j
- w_j Vorauszahlungsprozentsatz
- $a_{360-j+1}$ Barwert der verbleibenden monatlichen Zahlungen

Motivierendes Beispiel

geeignetes Zinsmodell:

$$i_j = K_0^j i_0 e^{\xi_1 + \ldots + \xi_j}$$

w_j in Abhängigkeit von i_j:

$$w_j(\xi_1, \ldots, \xi_j) = K_1 + K_2 \arctan(K_3 i_j + K_4)$$

Die Zahlungen im Monat j in den Pool:

$$M_j = C(1 - w_1(\xi_1)) \ldots (1 - w_{j-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1})) \cdot$$
$$[1 + w_j(\xi_1, \ldots, \xi_j)(a_{360-j+1} - 1)]$$

Motivierendes Beispiel

Diese Zahlungen werden auf die Klassen $G_{j;T}(\xi_1, \ldots, \xi_j)$ aufgeteilt.

Zahlungen insgesamt:

$$PV_T(\xi_1, \ldots, \xi_{360}) = \sum_{j=1}^{360} G_{j;T}(\xi_1, \ldots, \xi_j) v_j(\xi_1, \ldots, \xi_{j-1})$$

Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[PV_T] = \int_{[0,1]^{360}} PV_T(y_1(x_1), \ldots, y_{360}(x_{360})) dx_1 \ldots dx_{360}$$

numerische Integration (Trapezregel)

1-dimensionale Fall

$$\int_0^1 f(u)du \approx \sum_{n=0}^{m} w_n f\left(\frac{n}{m}\right)$$

$m \in \mathbb{N}$, und $w_0 = w_m = \frac{1}{2m}$ und $w_n = \frac{1}{m}$ für $1 \leq n \leq m-1$

numerische Integration (Trapezregel)

1-dimensionale Fall

$$\int_0^1 f(u)du \approx \sum_{n=0}^{m} w_n f\left(\frac{n}{m}\right)$$

$m \in \mathbb{N}$, und $w_0 = w_m = \frac{1}{2m}$ und $w_n = \frac{1}{m}$ für $1 \leq n \leq m-1$

s-dimensionale Fall

$$\int_{\bar{I}^s} f(u)du \approx \sum_{n_1=0}^{m} \dots \sum_{n_s=0}^{m} w_{n_1} \dots w_{n_s} f\left(\frac{n_1}{m}, \dots, \frac{n_s}{m}\right)$$

Fehlerabschätzung

- 1-dimensionaler Fall
  - Fehlerschranke von $O(m^{-2})$

Fehlerabschätzung

- 1-dimensionaler Fall
  - Fehlerschranke von $O(m^{-2})$
- s-dimensinaler Fall
  - Fehlerschranke von $O(m^{-2})$

Fehlerabschätzung

- 1-dimensionaler Fall
  - Fehlerschranke von $O(m^{-2})$
- s-dimensinaler Fall
  - Fehlerschranke von $O(m^{-2})$
  - Gesamtknotenanzahl $N = (m+1)^s$
  - Fehlerschranke $O(N^{\frac{-2}{s}})$

Fehlerabschätzung

- 1-dimensionaler Fall
  - Fehlerschranke von $O(m^{-2})$
- s-dimensinaler Fall
  - Fehlerschranke von $O(m^{-2})$
  - Gesamtknotenanzahl $N = (m+1)^s$
  - Fehlerschranke $O(N^{\frac{-2}{s}})$

Soll der absolute Fehler $\leq 10^{-2}$ sein, dann braucht man 10^s Knoten.

Fehlerabschätzung

- 1-dimensionaler Fall
  - Fehlerschranke von $O(m^{-2})$
- s-dimensinaler Fall
  - Fehlerschranke von $O(m^{-2})$
  - Gesamtknotenanzahl $N = (m+1)^s$
  - Fehlerschranke $O(N^{\frac{-2}{s}})$

Soll der absolute Fehler $\leq 10^{-2}$ sein, dann braucht man 10^s Knoten.

Problem

Die Anzahl der Knoten steigt exponentiell mit der Dimension.

CURSE OF DIMENSIONALITY

Monte Carlo Verfahren

Betrachten wir die approximative Berechnung von $\int_B f(u)du$.
Sei B ein Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $d\mu = \frac{du}{\lambda_s(B)}$.

Dann gilt:

Monte Carlo Verfahren

Betrachten wir die approximative Berechnung von $\int_B f(u)du$.
Sei B ein Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $d\mu = \frac{du}{\lambda_s(B)}$.

Dann gilt:

$$\int_B f(u)du = \lambda_s(B) \int_B f d\mu = \lambda_s(B) E(f)$$

Monte Carlo Verfahren

Betrachten wir die approximative Berechnung von $\int_B f(u)du$.
Sei B ein Wahrscheinlichkeitsraum mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß $d\mu = \frac{du}{\lambda_s(B)}$.

Dann gilt:

$$\int_B f(u)du = \lambda_s(B) \int_B f d\mu = \lambda_s(B) E(f)$$

- $f \in L^1(\mu)$
- $\lambda_s(B)$ das s-dimensionale Lebesgue Maß
- $E(f)$ der Erwartungswert der Zufallsvariable f

Monte Carlo Abschätzung

Betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(A, \mathcal{A}, \lambda)$ und seien $a_1, \ldots, a_N \in A$ unabhängige und λ-verteilte Zufallsstichproben und

$$E(f) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n)$$

Monte Carlo Abschätzung

Betrachten wir den Wahrscheinlichkeitsraum $(A, \mathcal{A}, \lambda)$ und seien $a_1, \ldots, a_N \in A$ unabhängige und λ-verteilte Zufallsstichproben und

$$E(f) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n)$$

Starkes Gesetz der großen Zahlen:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) = E(f)$$

Monte Carlo Verfahren

Varianz:

$$\sigma^2(f) = \int_A (f - E(f))^2 d\lambda,$$

Monte Carlo Verfahren

Varianz:

$$\sigma^2(f) = \int_A (f - E(f))^2 d\lambda,$$

Satz 1.1:

Sei $f \in L^2(\lambda)$, dann gilt für jedes $N \geq 1$:

$$\int_A \dots \int_A \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) - E(f) \right)^2 d\lambda(a_1) \dots d\lambda(a_n) = \frac{\sigma^2(f)}{N}.$$

Monte Carlo Verfahren

Zentraler Grentwertsatz:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{c_1\sigma(f)}{\sqrt{N}} \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) - E(f) \leq \frac{c_2\sigma(f)}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{c_1}^{c_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$c_1 < c_2$

Monte Carlo Verfahren

Zentraler Grentwertsatz:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\frac{c_1\sigma(f)}{\sqrt{N}} \leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(a_n) - E(f) \leq \frac{c_2\sigma(f)}{\sqrt{N}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{c_1}^{c_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$c_1 < c_2$

Monte Carlo Abschätzung:

$$\int_B f(u)du \approx \frac{\lambda_s(B)}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n)$$

mit einer probabilistischen Fehlerschranke von $O(N^{-\frac{1}{2}})$.

Varianzreduktion

„*stratified sampling*“(geschichtete Zufallsstichprobe)

- Wahrscheinlichkeitsraum $(A, \mathcal{A}, \lambda)$
- Zerlege A in $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ mit $\lambda(A_j) > 0$ für $1 \leq j \leq k$
- N_j unabhängige μ_j-verteilte Zufallsstichproben $a_1^{(j)}, \ldots, a_{N_j}^{(j)} \in A_j$, mit $\mu_j = \lambda(A_j)^{-1}\lambda$ dem Wahrscheinlichkeitsmaß auf A_j

Varianzreduktion

„*stratified sampling*“(geschichtete Zufallsstichprobe)

- Wahrscheinlichkeitsraum $(A, \mathcal{A}, \lambda)$
- Zerlege A in $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ mit $\lambda(A_j) > 0$ für $1 \leq j \leq k$
- N_j unabhängige μ_j-verteilte Zufallsstichproben $a_1^{(j)}, \ldots, a_{N_j}^{(j)} \in A_j$, mit $\mu_j = \lambda(A_j)^{-1}\lambda$ dem Wahrscheinlichkeitsmaß auf A_j

$$E(f) = \sum_{j=1}^{k} \int_{A_j} f d\lambda = \sum_{j=1}^{k} \lambda(A_j) \int_{A_j} f d\mu_j \approx \sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda(A_j)}{N_j} \sum_{n=1}^{N_j} f(a_n^{(j)})$$

Varianzreduktion

Der MSE kann mit derselben Methode wie im Beweis von Satz 1.1 berechnet werden

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda(A_j)}{N_j} \int_{A_j} \left(f - \frac{1}{\lambda(A_j)} \int_{A_j} f d\lambda \right)^2 d\lambda.$$

Varianzreduktion

Der MSE kann mit derselben Methode wie im Beweis von Satz 1.1 berechnet werden

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda(A_j)}{N_j} \int_{A_j} \left(f - \frac{1}{\lambda(A_j)} \int_{A_j} f d\lambda \right)^2 d\lambda.$$

Satz 1.2:

Ist $N_j = \lambda(A_j)N$, $1 \leq j \leq k$,und ganzzahlig dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\lambda(A_j)}{N_j} \int_{A_j} \left(f - \frac{1}{\lambda(A_j)} \int_{A_j} f d\lambda \right)^2 d\lambda. \leq \frac{\sigma^2(f)}{N}.$$

Einführung

quasi-Monte Carlo Abschätzung

$$\int_{\bar{I}^s} f(u) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n)$$

Fehlerschranke von $O(N^{-1}(log(N))^{s-1})$

Gleichverteilung

Im idealisierten Modell ersetzen wir $x_1, \ldots, x_N$ durch eine unendliche Folge $x_1, x_2, \ldots$ von Punkten aus $\bar{I}^s$.

Gleichverteilung

Im idealisierten Modell ersetzen wir $x_1, \ldots, x_N$ durch eine unendliche Folge $x_1, x_2, \ldots$ von Punkten aus $\bar{I}^s$.
Die Folge $x_1, x_2, \ldots$ aus $\bar{I}^s$, heißt gleichverteilt auf $\bar{I}^s$ wenn

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_{\bar{I}^s} f(u)du$$

für alle stetigen Funktionen $f \in \bar{I}^s$.

Gleichverteilung

Im idealisierten Modell ersetzen wir $x_1, \ldots, x_N$ durch eine unendliche Folge $x_1, x_2, \ldots$ von Punkten aus $\bar{I}^s$.
Die Folge $x_1, x_2, \ldots$ aus $\bar{I}^s$, heißt gleichverteilt auf $\bar{I}^s$ wenn

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_{\bar{I}^s} f(u) du$$

für alle stetigen Funktionen $f \in \bar{I}^s$.

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} c_J(x_n) = \lambda_s(J)$$

1-dimensionale Diskrepanz

Zählfunktion:

$$A(B;P) = \sum_{n=1}^{N} c_B(x_n),$$

1-dimensionale Diskrepanz

Zählfunktion:

$$A(B;P) = \sum_{n=1}^{N} c_B(x_n),$$

1-dimensionale Diskrepanz

$$D_N = D_N(x_1, \ldots, x_N) = \sup_{0 \leq u < v \leq 1} \left| \frac{A([u,v);P)}{N} - (v-u) \right|$$

1-dimensionale Diskrepanz

Zählfunktion:

$$A(B;P) = \sum_{n=1}^{N} c_B(x_n),$$

1-dimensionale Diskrepanz

$$D_N = D_N(x_1,\dots,x_N) = \sup_{0\le u<v\le 1}\left|\frac{A([u,v);P)}{N} - (v-u)\right|$$

1-dimensionale Sterndiskrepanz

$$D_N^* = D_N^*(x_1,\dots,x_N) = \sup_{0\le u\le 1}\left|\frac{A([0,u);P)}{N} - u\right|$$

1-dimensionale Diskrepanz

Satz 2.1:

Die Folge S ist gleichverteilt genau dann, wenn $\lim_{N\to\infty} D_N(S) = 0$.

1-dimensionale Diskrepanz

Satz 2.1:

Die Folge S ist gleichverteilt genau dann, wenn $\lim_{N\to\infty} D_N(S) = 0$.

Satz 2.2:

Für jede Folge S vom Umfang N gilt:

$$\frac{1}{N} \leq D_N \leq 1.$$

die mehrdimensionale Diskrepanz

mehrdimensionale Diskrepanz

$$D_N(\mathcal{B}; P) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \frac{A(B; P)}{N} - \lambda_s(B) \right|$$

die mehrdimensionale Diskrepanz

mehrdimensionale Diskrepanz

$$D_N(\mathcal{B}; P) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \frac{A(B; P)}{N} - \lambda_s(B) \right|$$

mehrdimensionale Sterndiskrepanz

$D_N^*(P) = D_N^*(x_1, \ldots, x_N)$ der Punktmenge P ist definiert durch $D_N^*(P) = D_N(\mathcal{J}^*; P)$, wo $\mathcal{J}^*$ eine Familie aller Teilintervalle von I^s der Form $\prod_{i=1}^{s}[0, u_i)$ ist.

die mehrdimensionale Diskrepanz

Satz 2.3:

Für jedes P deren Punkte in $\bar{I}^s$ liegen, gilt

$$D_N^*(P) \leq D_N(P) \leq 2^s D_N^*(P).$$

die mehrdimensionale Diskrepanz

Satz 2.3:

Für jedes P deren Punkte in $\bar{I}^s$ liegen, gilt

$$D_N^*(P) \leq D_N(P) \leq 2^s D_N^*(P).$$

Es folgt, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- S ist gleichverteilt auf $\bar{I}^s$;
- $\lim_{N\to\infty} D_N(S) = 0$;
- $\lim_{N\to\infty} D_N^*(S) = 0$.

die mehrdimensionale Diskrepanz

Satz 2.4:

Wenn die $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N \in [0,1], |x_n - y_n| \leq \epsilon$ für $1 \leq n \leq N$ erfüllen dann gilt:

$$|D_N^*(x_1, \ldots, x_N) - D_N^*(y_1, \ldots, y_N)| \leq \epsilon,$$

$$|D_N(x_1, \ldots, x_N) - D_N(y_1, \ldots, y_N)| \leq 2\epsilon$$

die mehrdimensionale Diskrepanz

Satz 2.4:

Wenn die $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N \in [0,1], |x_n - y_n| \leq \epsilon$ für $1 \leq n \leq N$ erfüllen dann gilt:

$$|D_N^*(x_1, \ldots, x_N) - D_N^*(y_1, \ldots, y_N)| \leq \epsilon,$$

$$|D_N(x_1, \ldots, x_N) - D_N(y_1, \ldots, y_N)| \leq 2\epsilon$$

Satz 2.5:

Sei $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N \leq 1$, dann gilt

$$D_N^*(x_1, \ldots, x_N) = \max_{0 \leq n \leq N} \max \left(\left| \frac{n}{N} - x_n \right|, \left| \frac{n}{N} - x_{n+1} \right| \right)$$

$$= \frac{1}{2N} + \max_{1 \leq n \leq N} \left| x_n - \frac{2n-1}{2N} \right|.$$

beschränkte Variation

Definition:

Die Funktion f heißt von beschränkter *Variation* auf $[0,1]$, wenn es eine Konstante $M > 0$ gibt, so dass für jede Zerlegung $Z := x_0, x_1, \dots, x_n$ von $[0,1]$, stets

$$V(f,Z) := \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M$$

bleibt.
D.h. f von beschränkter Variation (beschränkter Schwankung), wenn ihre totale Variation (totale Schwankung)

$$V(f) := \sup_Z V(f,Z)$$

endlich ist.

beschränkte Variation

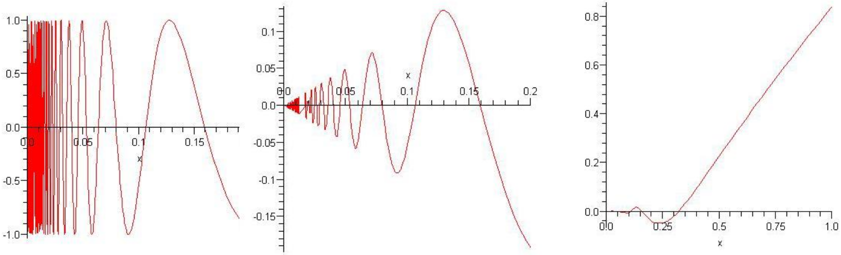

Abbildung: $sin(1/x)$ $xsin(1/x)$ $x^2sin(1/x)$

beschränkte Variation

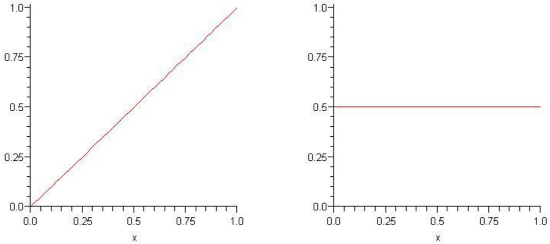

Abbildung: x $\quad$ $0,5$

Koksma-Ungleichung

Satz 2.6:

Wenn f eine beschränkte Variation $V(f)$ auf $[0,1]$ hat, dann gilt für alle $x_1, \ldots, x_N \in [0,1]$:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(u)du \right| \leq V(f) D_N^*(x_1, \ldots, x_N).$$

Weitere Schranken

Stetigkeitsmaß:

$$\omega(f;t) = \sup_{\substack{u,v\in[0,1]\\ |u-v|\le t}} |f(u)-f(v)| \qquad \text{für } 0 \le t \le 1$$

Weitere Schranken

Stetigkeitsmaß:

$$\omega(f;t) = \sup_{\substack{u,v\in[0,1] \\ |u-v|\leq t}} |f(u) - f(v)| \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

Satz 2.7:

Ist f eine stetige Funktion auf $[0,1]$, dann gilt für alle $x_1, \ldots, x_N \in [0,1]$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(u)du \right| \leq \omega(f; D_N^*(x_1, \ldots, x_N)).$$