Hausübungsbeispiele

Prämienbegünstigte Zukunftsvorsorge

Die staatlich geförderte Zukunftsvorsorge ist eine Pensionsversicherung mit Kapitalgarantie, welche als besonderen Anreiz unter anderem (neben z.B. steuerlichen Begünstigungen) einen Prämienzuschuss vom Staat beinhaltet - je nach Marktzinssatz wird die Prämie (Achtung: nicht das bis dahin angesparte Kapital) um 8.5% - 13% (2008: 9.5%) aufgestockt.
Im Gegenzug muss die Versicherungsgesellschaft die eingenommen Prämien zu einem Anteil von zumindest 40% in Aktien an der Wiener Börse (oder der Börse eines anderen EU-Landes mit einer Börsenkapitalisierung von höchstens 30% des BIP) investieren und, wie bereits oben erwähnt, das einbezahlte Kapital garantieren. Außerdem ist eine Laufzeit von zumindest 10 Jahren gesetzlich vorgeschrieben. Das heißt, es besteht mindestens 10 Jahre nach der ersten Prämienzahlung kein Zugriff auf das angesparte Kapital. Weiters ist man verpflichtet das Kapital in eine Leibrente umzuwandeln, da bei einer Einmalauszahlung Rückzahlungen bzw. Steuern anfallen würden.

1 Nehmen Sie an, Sie schließen eine derartige Zukunftsvorsorge mit einer Laufzeit von 20 Jahren, sowie jährlichen Prämien von 2.000 € (ohne staatl. Förderung) ab. Sowohl die staatlichen Förderungen als auch die Rendite des Fonds seien konstant und betragen 9.5% für die Förderung bzw. 5% für die Rendite.
Berechnen Sie nun für den Überlebensfall unter Verwendung der aktuellen österreichischen Sterbetafel (mit Ihrem Alter als Grundlage) den Schlusswert des angesparten Kapitals in 20 Jahren. Leiten Sie daraus weiters die Höhe der jährlichen und nachschüssigen Auszahlungen der Zusatzpension (Leibrente), in die das angesparte Kapital dann umgewandelt wird, ab. Der sowohl für die Leibrente verwendete technische Zinsfuß sei $i = 5\%$.

2 Nehmen Sie an Sie veranlagen 20 Jahre jährlich 2000 € in einem Fonds, der jährlich 7% Rendite bringt. Berechnen Sie unter der Annahme, dass Sie in 20 Jahren noch am Leben sind, die Höhe einer lebenslänglichen Leibrente, die mit einer Nettoeimalprämie in Höhe des Endwertes des Fonds - abzüglich 25% KeSt auf den Gewinn des Fonds - erreicht werden kann. Der Rechnungszinssatz fuer die Rente sei 5%.

3 Berechnen Sie die fairen Nettoprämien für eine von Ihnen abgeschlossene nachschüssige, 20 Jahre aufgeschobene, jährliche Leibrente von 5.000 € mit Kapitalgarantie. Das heisst, falls Sie vor Antritt der Leibrente versterben, werden die bisher einbezahlten Prämien zurückerstattet. Weiters wollen Sie die Nettoprämien nur bis zum Tod, maximal aber bis zum Antritt der Leibrente bezahlen. Verwenden Sie die aktuellen Sterbetafeln, sowie einen Rechnungszinssatz von 5%.

Versicherungen auf mehrere Leben

Definition. *Der Zustand des letzten Lebens für ein Paar ist definiert als:* $T = \max(T_1, T_2)$*, wobei* T_i *die zukünftige Lebensdauer der beiden Einzelpersonen bezeichnet.*

Berechnen Sie für einen 50-jährigen Mann und eine 48-jährige Frau mithilfe der aktuellen österreichischen Sterbetafel und einem Zinssatz von 5%:

4 **a)** die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau den Mann überlebt.
b) die Nettoeinmalprämie für eine 20-jährige Todesfallversicherung in Höhe von 100.000 € auf das letzte Leben des Paares.

5 **a)** die Wahrscheinlichkeit, dass der Mann die Frau überlebt.
b) die jährlichen Nettoprämien für folgenden Kontrakt: Das Paar möchte beginnend in 15 Jahren eine nachschüssig und jährlich ausbezahlte Zusatzpension in Höhe von 3.500 € bekommen, solange einer von beiden noch am Leben ist, wobei die Prämien nur bis zum Tod des letzten Partners, längstens jedoch bis zum Antritt der Zusatzrente einbezahlt werden sollen.

6 Betrachten Sie folgenden Vertrag: festgelegt sei die Zahlung von 10.000 € am Ende des Sterbejahres des Mannes im Falle, dass die Frau zu diesem Zeitpunkt noch am Leben ist. Berechnen Sie die Höhe der fairen Nettoprämie, die bis zum Tod des Mannes, maximal aber 10-mal, jährlich und vorschüssig einbezahlt wird.

7 die Nettoeinmalprämie für folgenden Vertrag: Die Versicherung bezahlt, beginnend im Jahr des Ablebens des ersten Partners (unabhängig wer von beiden als erstes stirbt), jährlich und nachschüssig bis zum Tode des zweiten Partners 2.500 € aus.

8 die fairen Nettoprämien für eine Versicherung, die jährlich, nachschüssig beginnend im 10. Jahr $1.03^k 10.000$ € mit k der Laufzeit der Rente (das im ersten Jahr der Auszahlung 10.000 €, im zweiten $1.03 \cdot 10.000$ €, im dritten $1.03^2 \cdot 10.000$ €, usw.) ausbezahlt, solange die Frau am Leben ist. Die Nettoprämien sollen nur bis zum Tod des ersten Partners, höchstens aber 7 Jahre bezahlt werden.

9 die faire Nettoeinmalprämie für eine Todesfallversicherung auf das letzte Leben in Höhe von $10.000 + 5.000 \cdot K$ €, wobei K das Todesjahr des zweiten Partners ist.

Simulation

Seien X und Y im Folgenden 2 unabhängige standard-normalverteilte Zufallsvariablen (also normalverteilte Zufallsvariabeln mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1).

10 Erzeugen Sie die ersten 1.000 Werte der Haltonfolge mit Basen 2 und 3 und "simulieren" Sie damit 1000 Werte der Zufallsvariablen $Z = X + Y$ wie folgt: Sei $(a_n^{(1)}, a_n^{(2)})$ das n-te Glied der Haltonfolge. Dann ergeben sich fuer die Realisationen x und y der Zufallsvariablen X bzw. Y

$$x = \Phi^{-1}(a_n^{(1)}) \quad \text{bzw.} \quad y = \Phi^{-1}(a_n^{(2)}),$$

wobei Φ^{-1} die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.
Schätzen Sie mit Hilfe dieser 1000 Beobachtungen den Erwartungswert $\mathbb{E}[Z]$ und die Varianz $\mathbb{V}[Z] = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2]$ von Z und vergleichen Sie diese Werte mit den exakten Momenten von Z.

11 Erzeugen Sie die ersten 1.000 Werte der Haltonfolge mit Basen 2 und 3 und "simulieren" Sie damit 1000 Werte der Zufallsvariablen $Z = X - Y$ wie folgt: Sei $(a_n^{(1)}, a_n^{(2)})$ das n-te Glied der Haltonfolge. Dann ergeben sich die Realisationen x und y der Zufallsvariablen X bzw. Y aus

$$x = \Phi^{-1}(a_n^{(1)}) \quad \text{bzw.} \quad y = \Phi^{-1}(a_n^{(2)}),$$

wobei Φ^{-1} die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.
Schätzen Sie mit Hilfe dieser 1000 Beobachtungen den Erwartungswert $\mathbb{E}[Z]$ und die Varianz $\mathbb{V}[Z] = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2]$ von Z und vergleichen Sie diese Werte mit den exakten Momenten von Z.