1 Prämienkalkulationsprinzipien

1 Die sog. *Risikoaversion* des Versicherers ist durch

$$r(w) := -\frac{u_I''(w)}{u_I'(w)}$$

definiert, wobei $u_I(w)$ die Nutzenfunktion des Versicherers bezeichnet. Man zeige, dass im Falle $|u''(w_I)| \ll 1$ für die Nullnutzenprämie näherungsweise gilt:

$$P(S) \approx \mathbb{E}[S] + \frac{r(w_I)}{2}\mathrm{Var}(S)$$

und insbesondere bei exponentieller Nutzenfunktion

$$P(S) \approx \mathbb{E}[S] + \frac{a}{2}\mathrm{Var}(S).$$

2 Zeige, dass beim Exponentialprinzip die Prämie bei festem Risiko mit a steigt!

3 Sei ein Risiko S gleichverteilt im Intervall $[0, 100]$. Man bestimme die Prämie für S für jedes der im Kapitel angeführten Prämienkalkulationsprinzipien!

4 Sei ein Risiko S exponentialverteilt mit Wahrscheinlichkeitsdichte $f(s) = 3e^{-3s}$. Man bestimme die Prämie für S für jedes der im Kapitel angeführten Prämienkalkulationsprinzipien!

5 Sei I_M die Geldmenge, die ein Rückversicherer dem Versicherer bei einer Stop-Loss-Rückversicherung mit Selbstbehalt M zahlen muss. Für den Fall, dass der Gesamtschaden S durch eine Gammaverteilung mit Verteilungsfunktion

$$\Gamma(x; \alpha, \beta) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}\, dt$$

approximiert wird, zeige man

$$\mathbb{E}[I_M] = \frac{\alpha}{\beta}\Big(1 - \Gamma(M; \alpha+1, \beta)\Big) - M\Big(1 - \Gamma(M; \alpha, \beta)\Big).$$

6 Sei S zusammengesetzt Poisson-verteilt mit $\lambda = 0.8$ und diskreten Einzelschadenshöhen 1,2 und 3 mit Wahrscheinlichkeiten 0.25, 0.375 bzw. 0.375. Berechne $\mathbb{E}[I_6]$ (Notation siehe Bsp. 5)!

7 Sei S zusammengesetzt Poisson-verteilt mit $\lambda = 1.5$ und diskreten Einzelschadenshöhen 1 und 2 mit Wahrscheinlichkeiten 2/3 bzw. 1/3. Berechne $\mathbb{P}(S = x)$ und $\mathbb{E}[I_x]$ für $x = 0, 1, \dots, 6$ (Notation siehe Bsp. 5)!

Ruintheorie

8 Bestimme den Anpassungskoeffizienten, falls alle Schadenshöhen gleich 1 sind!

9 Man nehme an, das $\mathrm{MGF}_Y(r)$, also die Momentenerzeugende Funktion der Einzelschäden im Cramer-Lundberg-Modell, eine streng monoton steigende, stetige und surjektive Funktion von $(-\infty, B) \to (0, \infty)$ mit $B > 0$ ist. Berechne $\lim_{c \to \lambda\mu} R$ und $\lim_{c \to \infty} R$.

10 Zeige

$$R < \frac{2\theta\mu}{\mu_2}.$$

(Hinweis: verwende die Abschätzung $e^{rx} > 1 + rx + \frac{1}{2}(rx)^2, \ (r > 0, x > 0)$)

11 Man zeige, dass für $R > 0$ und beschränkte Schadenshöhen $Y_i < m$ gilt:

$$\psi(x) > e^{-R(x+m)}.$$

12 Man leite für exponentialverteilte Schadenshöhen aus

$$\Psi(x) = \frac{e^{-Rx}}{\mathbb{E}[e^{-R\,C_T} | T < \infty]} \qquad \forall x \geq 0$$

eine explizite Formel für die Ruinwahrscheinlichkeit her!

13 Bestimme die Verteilung von L_1 für den Fall, dass die Einzelschäden exponentialverteilt mit Parameter β sind.

14 Bestimme die Verteilung von L_1 für den Fall, dass die Einzelschäden alle Größe 2 haben.